

ANNALEN DER PHYSIK

5. FOLGE • BAND 31 • HEFT 2 • JANUAR 1938

Der zeitliche Verlauf des Magnetisierungsvorganges in schwachen Feldern

Von Heinz Wittke

(Mit 11 Abbildungen)

Der heutige Stand unserer Kenntnisse über die Magnetisierung ferromagnetischer Stoffe stellt sich so dar:

Als Träger der Magnetisierung werden die Spins oder besser gesagt Spingebiete, Weiss-Heisenbergische Elementargebiete, betrachtet, die sich unter dem Einfluß elastischer Verspannungen befinden, welche zum Teil mechanischer Natur, zum Teil durch ein den Körper durchdringendes, äußeres Magnetfeld erzeugt sind. Diese Vorstellung fand ihren Ausdruck in der Beckerschen¹⁾ Fundamentalfunktion. Klassische Minimumsprinzipien über das Energiegleichgewicht und die Betrachtung der mit der Kristallsymmetrie verträglichen Richtungskosinusbeziehungen führen dann zur Darstellung der B - H -Funktion in Parameterform.

Diese Behandlungsweise setzt also ausdrücklich für die Lösung ihrer Ansätze Gleichgewichtslagen der Spingebiete voraus, Lagen also, die exakt erst nach unendlich langer Zeit angenommen werden können.

Über die Vorgänge während der Änderung der Verspannungen sagt sie nichts aus. Man weiß also, welcher B_s -Wert sich nach einem gegebenen, zeitlich festen H_1 , B_1 nach der Variation um ΔH einstellen wird, weiß aber nicht, in welcher Weise B_1 sich zeitlich in B_s verwandelt. Ballistisch aufgenommene B - H -Schleifen, sie sollen im folgenden Zustandskurven heißen, können also sehr wohl die skizzierte Theorie beweisen, vermögen aber nichts über den wirklichen Vorgang in zeitlich veränderlichen Feldern auszusagen, da sich diese Schleifen als eine geometrisch „glatte“ Verbindung von Zustandspunkten ergeben, von denen jeder einzelne nicht das Mindeste über den zwischen H_1 , B_1 und H_2 , B_2 zurückgelegten Weg aussagt, wie Abb. 1 es durch die mit Fragezeichen versehenen Wege veranschaulicht.

1) R. Becker, Ztschr. f. Phys. 62. S. 253. 1930.

Das scheint bisher häufig übersehen worden zu sein. Ewing¹⁾ war nun der erste, der zunächst qualitativ darauf hinwies, daß in der Tat die in Abb. 1 angedeuteten, vom Inneren der Schleife aus

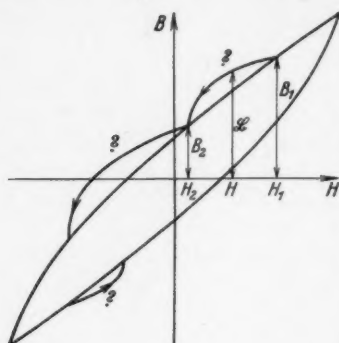


Abb. 1

konvexen Teilwege durchlaufen werden, Wittke²⁾ der erste, der dieses Phänomen quantitativ behandelte.

Die sich aus diesen Teilwegen zusammensetzenden Schleifen sollen im Gegensatz zu den Zustandskurven als *Vorgangskurven* bezeichnet werden. Geometrisch bedeutet dieses, daß die üblichen B - H -Schleifen, die Zustandskurven, kleinere Flächeninhalte haben als die tatsächlichen, antisymmetrisch gebuckelten Vorgangskurven. Wird das Ferromagnetikum nicht stoßweise magnetisiert, also mit

Ruhepausen von Zustandspunkt zu Zustandspunkt, sondern die Vorgangskurve in einem Zuge umlaufen, wie man das durch Wechselstromerregung erzielen kann, so wird statt der vielen kleinen Buckel ein großer jedem Rande der Zustandskurve aufsitzen. Also auch hier umschließt die Vorgangskurve eine größere Fläche als die Zustandskurve. Experimentell direkt hat E. A. Neumann³⁾ das gezeigt, nachdem Jordan⁴⁾ in einer Brückenschaltung gefunden hatte, daß bei Wechselstromerregung noch ein Zusatzverlust über den hinaus auftritt, der sich aus den für den Probekörper vorher bestimmten Zustandskurven errechnen läßt.

Zusammenfassend läßt sich also sagen: Die Zustandskurve umrandet ein Flächenstück, den Hysteresisverlust, weil die bei Nichtproportionalität zwischen B und H wegen der Gleichberechtigung symmetrischer $H_+ \rightleftharpoons H_-$ -Übergänge antisymmetrisch gelegenen Ränder nicht mehr zusammenfallen.

Die Hysteresis ist demnach der Ausdruck dafür, daß mit dem gleichen H zwei (oder mehr, von denen die über die Zahl 2 hinaus-

1) J. A. Ewing, Phil. Trans. S. 569. 1885 und Proc. Roy. Soc. Juni 1889.

2) H. Wittke, Ferromagnetische Nachwirkung, Schriften der Königsberger Gelehrten Gesellsch. Naturw. Klasse, Heft 3, 1935.

3) E. A. Neumann, Ztschr. f. Phys. 83. S. 619. 1933.

4) H. Jordan, Elektr. Nachrichtentechnik 1. S. 7. 1924.

gehenden instabil sind)¹⁾, verschiedene B verträglich sind, deren Auswahl die Vorgeschichte des augenblicklichen Zustandes trifft; sie ist eine Wirkung *ex priore tempore*.

Die Vorgangskurve schließt die Zustandskurve völlig in ihrem Inneren ein; ihr Flächeninhalt ist der Gesamtverlust. Ob sie bei genügend langsamer Variation des H sich der Zustandskurve beliebig nähern kann, ist eine noch offene Frage. Die Vorgangskurve entsteht dadurch, daß stabile Zustandswerte nur zögernd angenommen werden, weil auch bei Proportionalität zwischen den B und H der Zustandskurve keine Proportionalität zwischen den momentanen \mathfrak{B} und H der Vorgangskurve besteht. Diese Tatsache hat den Namen „Nachwirkung“ erhalten.

Die nachfolgenden Ausführungen behandeln nun die Frage, welcher nichtlineare Zusammenhang zwischen den \mathfrak{B} und H besteht, wenn man sich zunächst auf schwache Felder beschränkt, nachdem bereits vor 49 Jahren von Lord Rayleigh²⁾ die Gesetzmäßigkeiten entdeckt worden sind, welche die B und H in diesem Falle miteinander verknüpfen.

Die Versuchsanordnung

war bis auf einige Verbesserungen im Galvanometerkreise die gleiche, wie die 1935 bekannt gegebene³⁾. Sie sei hier noch einmal im Prinzip in Abb. 2 skizziert. Darin bedeuten:

- Sp = Ringspule, gefüllt mit dem Ferromagnetikum,
- r = deren Eigenwiderstand,
- R = induktionsfreier Parallelwiderstand,
- E_i = Innenbatterie mit der Spannung E_i ,
- E_a = Außenbatterie mit der Spannung E_a ,
- $S\bar{o}$ = Öffnungsschalter, geöffnet bei $t = 0$,
- Ss = Schließungsschalter, geschlossen bei $t = t$,
- G = Galvanometer, angeschaltet bei $t = t$ durch S_s ,
- V = Voltmeter.

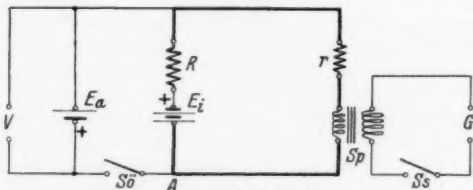


Abb. 2

1) R. Gans, Ann. d. Phys. [5] 24. S. 680. 1935.

2) Lord Rayleigh, Phil. Mag. [5] 23. S. 225. 1887.

3) H. Wittke, a. a. O., von jetzt ab als 1935 zitiert.

Geändert war gegen früher nur der Schaltautomat, welcher $S\delta$ und Ss bediente; da dieses Mal die Messungen über längere Zeiten, $0 \leq t \leq 1,8$ sec, ausgedehnt werden sollten, wurde am bisher benutzten Helmholtzschcn Pendelunterbrecher das Pendel durch einen Schalthebel ersetzt, welchen ein SAJA-Motor synchron antrieb. Der tote Gang des zwischengeschalteten Schneckengetriebes wurde durch eine Bandbremse beseitigt.

Neuartig war noch der Schließungsschalter Ss . Bekanntlich lassen sich durch eine Schaltuhr Kontakte störungsfrei nur öffnen, nicht schließen, weil die aufeinander schlagenden Kontakteile infolge der Federkräfte gedämpft hüpfende mikroskopische Bewegungen ausführen, so daß die Ausschläge eines derart angeschalteten Galvanometers nicht reproduzierbar sind. Kiesling¹⁾ überwand diese Schwierigkeiten, indem er die Schaltfedern durch Gummibänder aneinanderpreßte. Diese Konstruktion ist aber wegen der Verrottung des Gummis und wegen der Überbrückung der empfindlichsten Schaltstelle mit einem zweifelhaften Isolator doch nicht einwandfrei. Deshalb wurde die

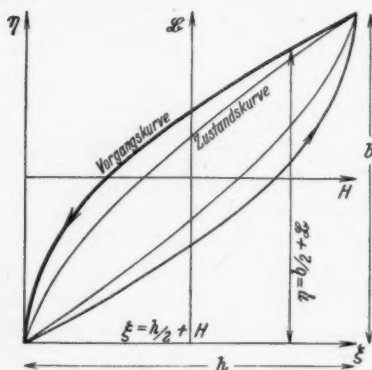


Abb. 3

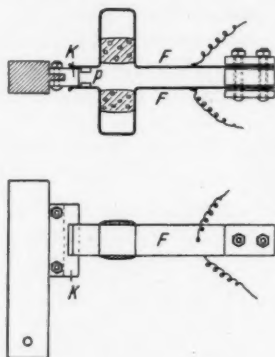


Abb. 4

Neukonstruktion nach Abb. 4 vorgenommen. Die eigentümlich gebogenen Federn F bestehen aus Neusilber, die Kontaktplättchen P aus Platin, die isolierenden Halter aus Bernstein, der Sperrkeil K , welcher im eingeklinkten Zustande den Schalter offen hält, aus Hartgummi, alles andere aus Messing. Die in die Federkehlen ziemlich pressend eingeklemmten Korkstücke bewirken eine so starke Dämpfung beim Zufallen des Schalters, daß die Hüpfbewegungen völlig unterbleiben, was an der tadellosen Reproduzierbarkeit der Galvanometerausschläge zu erkennen ist. Da derartige Schalter vielleicht auch anderwärts Verwendung finden könnten, wurde diese Mitteilung hier eingeflochten.

Bei geschlossenem Schalter $S\delta$ fließt (Abb. 2) von A aus gesehen in S_p der Ruhestrom $i_0 = + \frac{E_a}{r}$, bei geöffnetem Schalter $S\delta$

1) G. Kiesling, Ann. d. Phys. [5] 22. S. 402. 1935.

jedoch $i_{\infty} = -\frac{E_i}{R+r}$; wird bei $R=r$ also $E_i = 2 \cdot E_a$ gemacht, so wird $i_{\infty} = -i_0$, d. h. nach Öffnung von S_0 wird der in Abb. 3 dick gezeichnete Rand der zentrierten \mathfrak{B} -H-Schleife abwärts durchlaufen, nach der Schließung der dünn gezeichnete aufwärts. Strom und Spannung in dem dauernd geschlossenen Kreise, bestehend aus R , r und Sp , hängen zusammen durch die Gleichung:

$$K \cdot \Phi + i(R+r) = E_i.$$

Durch Multiplikation mit $\frac{0,4 \pi N}{D(R+r)}$ (N = primäre Windungszahl, D = mittlerer Umfang des Ringes) wird daraus:

$$k \cdot \mathfrak{B} + H = H_{\infty}.$$

Mit den aus Abb. 3 ersichtlichen Substitutionen

$$\eta = \mathfrak{B} + \frac{b}{2}, \quad \xi = H + \frac{h}{2}$$

erhält man

$$(1) \quad k \cdot \eta + \xi = 0.$$

Vorversuche hatten die ganz außerordentliche Empfindlichkeit der Nachwirkungserscheinungen in Eisen gegen jede mechanische Verspannung gezeigt. Der für die Messungen benützte Ring Nr. 6 wurde deshalb besonders vorsichtig hergestellt, um ihn nicht von vornherein mechanisch zu verspannen. Sein Eisenkörper wurde aus 1 mm dickem Draht in eine Stahlschablone mit elastischer Asbestausfütterung gewickelt und in der allseitig verschraubten Schablone $2\frac{1}{3}$ Std. lang im Gasgebläse bei heller Rotglut gehalten, dann in 1 Std. auf verschwindende Rotglut abgekühlt und im darauf verschlossenen Ziegelofen der weiteren Selbstabkühlung überlassen,

Tabelle 1

Ring Nr. 6, bestehend aus 519 Umwindungen Eisendrahtes von 1,00 mm Durchmesser

Eisenquerschnitt	in cm ²	4,075
Luftquerschnitt	—	1,52
Eisenquerschnitt	—	1,52
Ringhöhe	in cm	4,80
Außendurchmesser	in cm	12,26
Innendurchmesser	in cm	9,68
Primäre Windungszahl	—	823
Spulenkongstante	in $\frac{\text{Gauss}}{\text{Oersted}}$	30,00
Sekundäre Windungszahl	—	3000
$k \cdot (r + R)$	in Henry	$1,007 \cdot 10^{-4}$

die in 24 Std. auf etwa $+40^\circ\text{C}$ erfolgte. Zur Fixierung der Eisendrähte wurde die volle Schablone in Paraffin getaucht. Nach dem völligen Erkalten ließ sich der Ring aus der geöffneten Schablone ohne Zwang entfernen. Er wurde noch zwecks Isolation mit Baumwollband umwunden und dann die Kupferwicklung fest, aber ohne Schnürung aufgebracht. Die geometrischen Abmessungen des Ringes zeigt die Tab. 1.

Die Messungsergebnisse

1935 hatte der Verf. gefunden, daß sich die Vorgänge in der beschriebenen Anordnung während der ersten $\frac{1}{30}$ Sek. durch die Gleichung

$$\eta = C_1 \cdot e^{-\alpha t} + C_2 \cdot e^{-2\alpha t} + C_3 \cdot e^{-\gamma t}$$

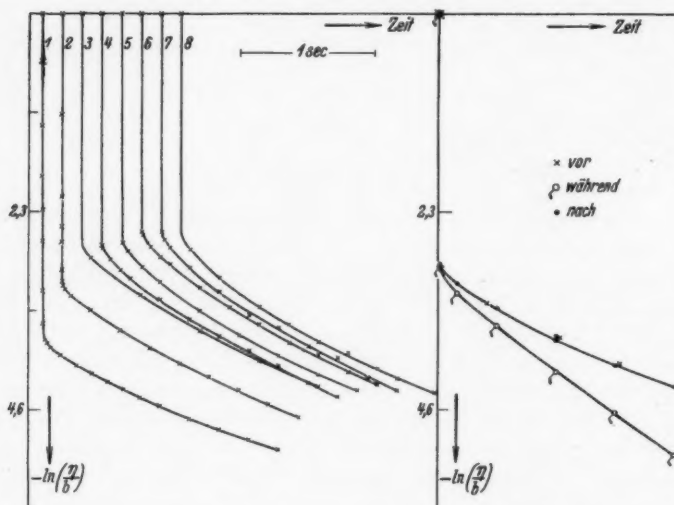


Abb. 5

Nebenabbildung

darstellen lassen. Dabei sind die beiden ersten Glieder einwandfrei theoretisch vorauszusehen. Vom dritten Gliede wurde jedoch vermutet, daß es nur eine erste Näherung sei und sich in Wirklichkeit als eine Summe von Exponentialfunktionen erweisen würde. Wenn diese Vermutung richtig ist, so muß die graphische Darstellung der Logarithmen dieses dritten Gliedes für große Zeiten nicht mehr linear verlaufen, sondern muß eine gekrümmte Linie geben. Deshalb wurde die Versuchsanordnung in der beschriebenen Weise umgebaut, um dieses Mal die Messungen bis zu 1,8 sec ausdehnen zu können.

Es wurden nur zentrierte Schleifen vermessen. Zur graphischen Darstellung wurden die ermittelten η einer Meßreihe durch deren b dividiert und $\ln\left(\frac{\eta}{b}\right)$ als Funktion der Zeit aufgetragen. Das Ergebnis zeigt die Abb. 5, worin die zeitlichen Anfangspunkte der einzelnen Kurven der besseren Übersicht wegen um gleiche Beträge auseinandergerückt worden sind.

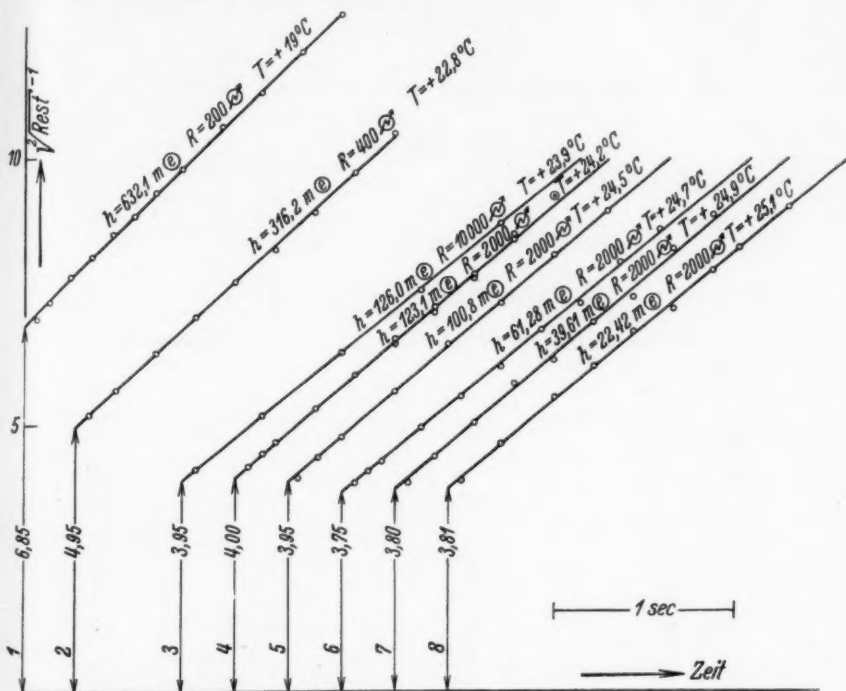


Abb. 6

Die erwartete Krümmung tritt deutlich auf. Es sollen im folgenden die η/b selbst für große Zeiten als „Rest“ bezeichnet werden. Nach einigen Versuchen wurde gefunden, daß diese ehemals als Exponentialfunktionen angesprochenen Reste sich in der Form

$$(I) \quad \text{Rest} = \frac{N \cdot h}{b \cdot (a + t)^2}$$

darstellen lassen. Zum Beweise für diese Behauptung wird gebildet

$$(II) \quad \sqrt[3]{\text{Rest}^{-1}} = \sqrt[3]{\frac{b}{N \cdot h}} \cdot (a + t) = m \cdot t + n.$$

Dieser Ausdruck ist in t linear. Abb. 6 zeigt die derart umgerechneten Kurven aus der Abb. 5. Sie verlaufen tatsächlich geradlinig.

Auch in der Abb. 6 sind die zeitlichen Anfangspunkte um gleiche Beträge auseinander gerückt. Die Nummern an den einzelnen Kurven bezeichnen die in den Abb. 5 und 6 zusammengehörenden. Die Länge der Abschnitte auf der Ordinatenachse, der Ausdruck

$$(III) \quad n = \sqrt[2]{\frac{b}{N \cdot h}} \cdot a,$$

ist den Abschnitten eingeschrieben. Weiter ist die Neigung

$$(IV) \quad m = \sqrt[3]{\frac{b}{N \cdot h}}.$$

Aus (III) und (IV) findet man

$$(V) \quad \text{die Nachwirkungszahl } \frac{N}{a^3} = \frac{b}{n^3}$$

$$(VI) \quad \text{die Hauptrelaxationszeit } a = \frac{n}{m}.$$

Zu den Abb. 5 und 6 findet man alle Zahlenangaben vereinigt in der Tab. 2.

Tabelle 2

Nr. der Kurve	Tempe- ratur in + °C	h in Milli-Oe	b/h in Gauss/Oe	n	m	N/a^3	a	N
1	19,0	632,1	439,7	6,85	3,32	9,37	2,06	39,7
2	22,8	316,2	369,9	4,95	3,07	15,1	1,61	39,2
3	23,9	126,0	327,9	3,95	2,71	21,0	1,46	44,7
4	24,2	123,1	327,2	4,00	2,87	20,4	1,39	39,5
5	24,5	100,8	322,3	3,95	2,84	20,7	1,39	40,0
6	24,7	61,28	313,5	3,75	2,73	22,3	1,37	42,0
7	24,9	39,61	308,7	3,80	2,82	21,4	1,35	39,0
8	25,1	22,42	305,0	3,81	2,77	21,0	1,38	40,0

Der gesamte zeitliche Verlauf des η stellt sich also in der jetzt weiter getriebenen Näherung so dar:

$$(2) \quad \eta = C_1 \cdot e^{-at} + C_2 \cdot e^{-2at} + \frac{N \cdot h}{(a + t)^3}.$$

Es wurden die gleichen Messungen noch bei verschiedenen Temperaturen angestellt. Der Ring lag bei den tiefen Temperaturen in Petroleum, bei Zimmertemperatur teils in Petroleum, teils trocken, bei den hohen in Paraffin vom ungefähren Schmelzpunkt + 49°C. Die Messungen wurden erst 45 Std. nach Erreichung der gewünschten Temperatur begonnen, um den Tempe-

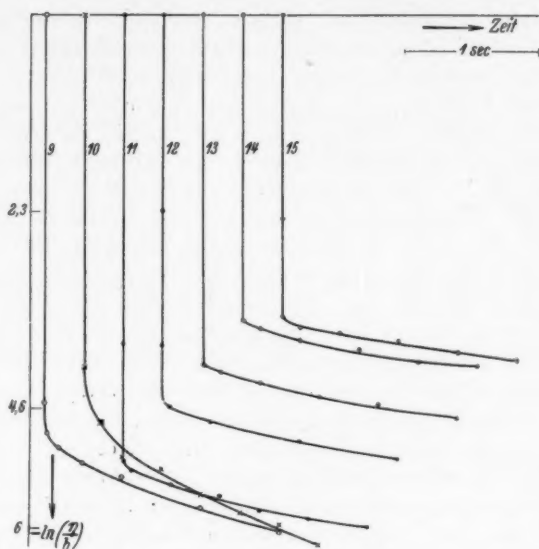


Abb. 7

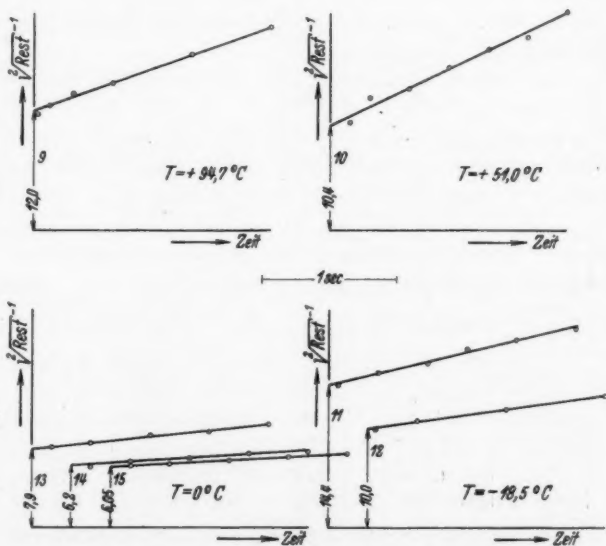


Abb. 8

raturdeformationen Zeit zum Spannungsausgleich zu geben. Wie nötig diese Vorsicht war, zeigt an einem krassen Beispiel die Nebenfigur in 5. Der Ring wurde in Petroleum bei $+20^{\circ}\text{C}$ vor der künstlichen Temperaturverspannung gemessen (Kurve vor). Dann wurde durch einen Tauchsieder das Petroleum in $1 \div 2$ Min. auf etwa $+28^{\circ}\text{C}$ erhitzt. Der Ring war jetzt nur in den äußersten Schichten erwärmt und damit teilweise verspannt. Die nach 2 St. vorgenommene Messung bei gleichem b begann bei $+26^{\circ}\text{C}$, endete bei $+25,8^{\circ}\text{C}$ und ergab eine stark abweichende Kurve (während), in der aber offensichtlich nur die Größe a durch die Verspannung verkleinert worden war, was aus der stärkeren Zeitabhängigkeit des Restes folgt. Im wesentlichen hatte der Ring im Innern wohl seine alte Temperatur nur geringfügig erhöht, dabei blieb die Nachwirkungszahl wesentlich die gleiche: Sie ist also von Verspannungen weit weniger abhängig als die Hauptrelaxationszeit. Nach 2 Tagen hatte sich ein neuer Gleichgewichtszustand ausgebildet, und zwar jetzt bei $+20,9^{\circ}\text{C}$, weil inzwischen wegen einer Wetterbesserung die Zimmertemperatur angestiegen war. Dieser Umstand machte jedoch bei der jetzt angestellten dritten Messung nichts merkliches aus. Die Kurve (nach) fällt mit der Kurve (vor) zusammen.

Die Abb. 7 und 8 zeigen für die vier außer der Zimmertemperatur noch verwendeten Temperaturen alles in der gleichen Weise wie die Abb. 5 und 6, und wieder bezeichnen gleiche Nummern zusammengehörende Kurven.

Die Zahlenwerte sind gesammelt dargestellt in der Tab. 3. Die Abb. 9 zeigt jetzt die Nachwirkungszahl N/a^2 und die Hauptrelaxationszeit α , dargestellt als Funktionen von h . Die für $h=0$ extrapolierten Werte beider Größen sind noch besonders an den Ordinatenachsen angeschrieben.

Tabelle 3

Nr. der Kurve	Temperatur in $^{\circ}\text{C}$	h in Milli-Oe	b/h in Gauss/Oe	n	m	N/a^2	a
9	$+94,8$	61,20	345,9	12,0	4,79	2,40	2,50
10	$+51,0$	59,76	323,8	10,4	6,59	2,99	1,58
11	$-19,5$	243,4	330,5	14,4	3,21	1,59	4,48
12	$-18,0$	60,96	290,4	10,0	1,86	2,90	5,38
13	0	242,4	340,6	7,9	1,42	5,45	5,56
14	0	60,63	299,5	6,20	0,901	7,79	6,88
15	0	21,90	290,8	6,05	0,817	7,95	7,31

Das schon 1935 in anderer Form veröffentlichte Ergebnis bestätigt sich erneut:

Für kleine h ist N/a^2 konstant (deshalb erschien auch bei den höheren Temperaturen eine Messung ausreichend, um diesen Wert festzulegen), um für darüber hinaus wachsende h langsam abzusinken. Gleichzeitig ist durch den Konstanzbereich von $\frac{N}{a^2} = f(h)$ die Definition dafür gegeben, was in diesem Sinne „kleine“ h sind.

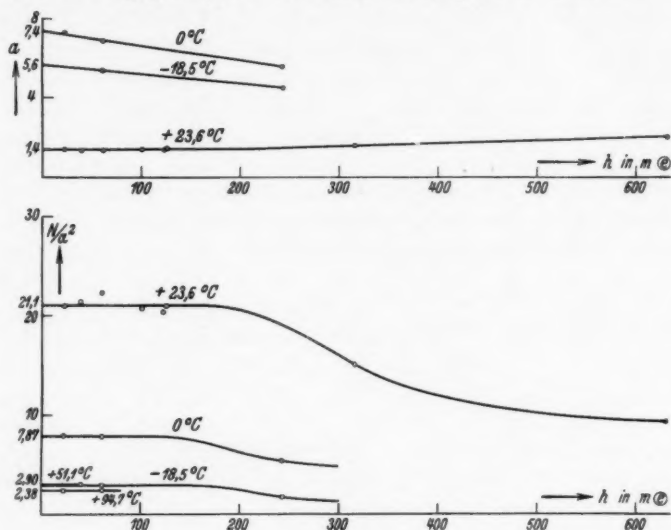


Abb. 9

Dieses Ergebnis findet sich bei allen Temperaturen in gleicher Weise, wobei kleine h bei diesem Werkstoff $0 \leq h \leq \frac{1}{2}$ Oe sind.

Über die a läßt sich auf Grund vorliegender Messungen nur soviel aussagen:

Bei Zimmertemperatur ist a im gleichen h -Bereich wie N/a^2 konstant, um für größere h langsam anzusteigen. Dabei bleibt selbst für größere h ($0 \leq h \leq \frac{2}{3}$ Oe) das Produkt $\left(\frac{N}{a^2}\right) \cdot a^2$ konstant, wie aus der letzten Spalte der Tab. 2 zu ersehen ist.

Für die beiden tieferen Temperaturen, für welche allein bei verschiedenen h Messungen vorliegen, nimmt a von Anfang an ab. Dabei ist

$$a_{h \rightarrow 0} < a_{h \rightarrow 0} > a_{h \rightarrow 0}$$

$$-18,5^\circ \text{C} \quad 0^\circ \text{C} \quad +23,6^\circ \text{C}.$$

Dieses Ergebnis kann wohl nur auf termisch-mechanische Verspannungen im Ringe zurückzuführen sein, die vielleicht durch das

Paraffin hervorgerufen wurden, welches bei den Messungen bei höheren Temperaturen eingedrungen war und sich jetzt besonders verfestigte. Wie aber schon die beschriebene „Vor-während-nach“-Messungsreihe zeigte, ist gegen Verspannungen wohl a sehr empfindlich, N/a^2 dagegen nicht, so daß der Verf. geneigt ist, den N/a^2 -Kurven volles Gewicht beizulegen.

Wie dieser im einzelnen unübersichtliche Tatbestand sich auch später aufhellen möge, so ist diese anscheinende Verworrenheit doch von Vorteil für die Sicherstellung der Behauptung, daß sich der Rest darstellen lasse als

$$\text{Rest} = \frac{\text{Konstante}}{(a + t)^2};$$

denn bei allen 15 Messungen bestätigt sich dieser Befund, dazu noch bei einigen anderen Messungen an Ringen anderer Nummern, die hier nicht aufgeführt werden konnten.

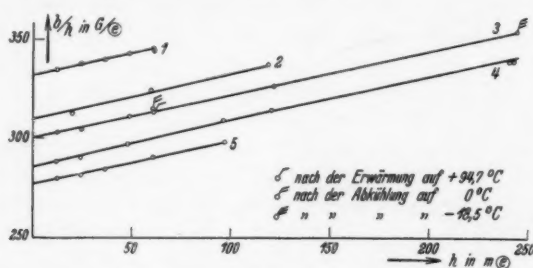


Abb. 10

Bekanntlich¹⁾ gilt für kleine h die Zustandsgleichung

$$B = \left(\mu + \frac{\nu'}{2} \cdot h \right) H \mp \nu \left(\frac{h^2}{4} - H^2 \right).$$

Die Konstanten wurden für das untersuchte Eisen in ballistischen Sondermessungen ermittelt. Die Abb. 10 zeigt den Verlauf von $\frac{b}{h} = f(h)$. Die Nummern an den Geraden beziehen sich auf die Zeile der Tab. 4, welche²⁾ alle Konstanten nochmals zusammenfaßt; die graphische Darstellung dazu gibt die Abb. 11. Nach den Temperaturmessungen laut den Tabellen 2 und 3 wurde b/h bei wieder-

1) Lord Rayleigh, a. a. O.; H. Jordan, Ztschr. f. techn. Phys. 11. S. 2. 1930; R. Gans, Ann. d. Phys. [5] 18. S. 701. 1933; H. Wittke, Ann. d. Phys. [5] 20. S. 106. 1934.

2) Die Temperaturangaben in der Tab. 4 sowie die in den Abb. 8, 9 und 10 sind Mittelbildungen aus den Einzelwerten der Messungen in den Tabellen 2 und 3 sowie der ballistischen.

Tabelle 4

Nr.	Temperatur in °C	μ	ν'	ν	$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{N}{a^2}$	$\lim_{h \rightarrow 0} a$
1	+ 94,7	332,0	454	234	2,38	~ 3
2	+ 51,1	310,0	460	194	2,99	$\sim 1,6$
3	+ 23,6	300,0	442	161	21,10	1,38
4	0	285,8	452	177	7,87	7,4
5	- 18,5	277,0	440	129	2,90	5,6

erreichter Zimmertemperatur nochmals ermittelt. Die so gefundenen Werte zeigen keinerlei Einfluß des thermischen Eingriffes auf die Zustandswerte, wie aus den mit Fahren versehenen Punkten in der Abb. 10 zu ersehen ist. Die ν sind nur aus den Remanenzen der Einzelschleifen ermittelt, haben daher auch nur orientierenden Charakter. Auffallend ist, daß ν ebenso wie a bei 0°C dieselbe Anomalie zeigt.

Die mathematische Beschreibung

1935 hatte der Verf. als Vorgangsgleichung

$$(3) \quad \mathfrak{B} = \bar{\mu} \cdot \vec{H} + \gamma (\mu_0 H - \mathfrak{B})$$

angeben können, allerdings dabei die Vermutung ausgesprochen, daß die Wahl eines festen γ nur Näherung sein würde, man vielmehr in der endgültigen Fassung mit allen $0 \leq \gamma \leq \infty$ würde zu rechnen haben, wie eingangs schon bemerkt wurde.

Es soll nun im folgenden gezeigt werden, wie man diese

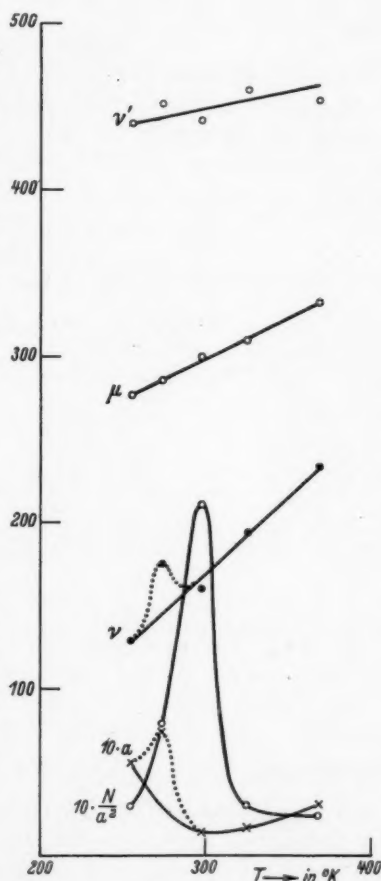


Abb. 11

Verteilungsfunktion der γ aus den mitgeteilten Messungen ermitteln kann. Dabei soll zunächst der Einfachheit halber von Hysteresis abgesehen werden, was bei extrem kleinen Feldern ja auch erlaubt ist.

Zu dem Zweck wird die Gl. (3) in der Form

$$(4) \quad \mathfrak{B}_\gamma = \bar{\mu} \cdot \dot{H} + \gamma(\mu_0 H - \mathfrak{B}_\gamma)$$

angesetzt. Mit den schon benutzten Substitutionen

$$\eta = \mathfrak{B} + \frac{b}{2},$$

$$\xi = H + \frac{h}{2}$$

geht (4) über in

$$(5) \quad \dot{\eta}_\gamma = \bar{\mu} \dot{\xi} + \gamma(\mu_0 \xi - \eta_\gamma),$$

weil aus (3) für $t = \infty$ ($\mathfrak{B} = B!$) ohne weiteres folgt $b = \mu_0 \cdot h$. Zur Lösung von (5) braucht man die Kenntnis des Verlaufes von ξ . Da nun die Messungen unter Vernachlässigung der Hysteresis nach (2) ergaben

$$(2a) \quad \eta = C_1 \cdot e^{-\alpha t} + Nh \cdot \frac{1}{(a+t)^2},$$

so findet man nach (1) daraus den Verlauf von

$$\xi = k \alpha C_1 e^{-\alpha t} + 2kNh \cdot \frac{1}{(a+t)^3}.$$

Mit diesem Wert wird aus (5), wenn noch beachtet wird, daß $\bar{\mu} k \alpha = 1$ ist,

$$\dot{\eta}_\gamma = -\gamma \eta_\gamma + \left\{ \begin{aligned} & -\alpha \cdot C_1 e^{-\alpha t} + \gamma \cdot \frac{\mu_0}{\bar{\mu}} \cdot C_1 \cdot e^{-\alpha t} \\ & - 6 \frac{Nh}{\alpha} \cdot \frac{1}{(a+t)^4} + 2\gamma \cdot \frac{\mu_0}{\bar{\mu}} \cdot \frac{Nh}{\alpha} \cdot \frac{1}{(a+t)^3} \end{aligned} \right\}.$$

Da die verkürzte Gleichung die Lösung

$$\eta_\gamma = C e^{-\gamma t}$$

hat, findet man nach Einsetzung dieses für C

$$C = C_1 \cdot \left(-\alpha + \gamma \cdot \frac{\mu_0}{\bar{\mu}} \right) \cdot \int e^{t(-\alpha+\gamma)} dt + 2\gamma \frac{\mu_0}{\bar{\mu}} \cdot \frac{Nh}{\alpha} \int \frac{e^{\gamma t}}{(a+t)^3} dt \\ - 2 \frac{Nh}{\alpha} \cdot 3 \int \frac{e^{\gamma t}}{(a+t)^4} dt + K$$

und daraus

$$C = C_1 \frac{-\alpha + \gamma \cdot \frac{\mu_0}{\bar{\mu}}}{-\alpha + \gamma} \cdot e^{-\alpha t} \cdot e^{\gamma t} \\ + \frac{2Nh}{\alpha} \cdot \left\{ \left(\gamma \frac{\mu_0}{\bar{\mu}} - \gamma \right) \cdot \int \frac{e^{\gamma t}}{(a+t)^3} dt + \frac{e^{\gamma t}}{(a+t)^3} \right\} + K.$$

Nun ist $\mu_0 \approx \bar{\mu}$, wie am Schlusse noch gezeigt werden wird. Hierdurch vereinfacht sich die letzte Zeile zu

$$C = C_1 \cdot e^{-\alpha t} \cdot e^{\gamma t} + K + \frac{2Nh}{\alpha} \cdot \frac{e^{\gamma t}}{(a+t)^2}.$$

Damit ist die Lösung gefunden als

$$(6) \quad \eta_{\gamma} = C_1 e^{-\alpha t} + K e^{-\gamma t} + \frac{2Nh}{\alpha} \cdot \frac{1}{(a+t)^2}.$$

Jetzt ist also

$$(7) \quad \eta = \int_0^{\infty} \eta_{\gamma} \cdot f(\gamma) d\gamma,$$

wobei $f(\gamma)$ die Verteilungsfunktion bedeutet.

Sie ist gefunden, wenn es gelingt, ein $f(\gamma)$ ausfindig zu machen, dergestalt, daß (7) wieder (2a) ergibt und gleichzeitig

$$\int_0^{\infty} f(\gamma) d\gamma = 1 \quad \text{ist.}$$

Das leistet der Ansatz

$$(8) \quad f(\gamma) = a^2 \gamma \cdot e^{-\gamma a}.$$

Aus (7) wird nämlich mit (8)

$$\eta = C_1 e^{-\alpha t} + K a^2 \int_0^{\infty} \gamma e^{-\gamma(a+t)} d\gamma + 2 \frac{Nh}{\alpha} \cdot \frac{1}{(a+t)^2}.$$

Das Integral ist $\frac{1}{(a+t)^2}$ und man hat

$$\eta = C_1 e^{-\alpha t} + K a^2 \cdot \frac{1}{(a+t)^2} + 2 \frac{Nh}{\alpha} \cdot \frac{1}{(a+t)^2}.$$

Weil nun $\alpha \gg 1$, wie am Schlusse noch gezeigt werden wird, ist, besonders für große Zeiten, sehr genau

$$\eta = C_1 e^{-\alpha t} + K a^2 \cdot \frac{1}{(a+t)^2}.$$

Da man die Konstante beliebig wählen darf, erhält man durch Vergleich mit (2a) den Beweis abschließend

$$(9) = (2a) \quad \eta = C_1 e^{-\alpha t} + Nh \cdot \frac{1}{(a+t)^2}.$$

Wegen $\alpha \bar{\mu} k = 1$ ist $\alpha = \frac{1}{\bar{\mu} k} = \frac{R+r}{L}$, wobei L die Selbstinduktivität des Ringes bedeutet. Damit ist α für den hier behandelten Ring rund $3 \cdot (R+r)$, was die oben für α gemachte Voraussetzung rechtfertigt. Aus den Anfangsbedingungen

$$\eta = b = \mu_0 h \quad \text{und} \quad \xi = h$$

für $t = 0$ findet man aus (9) und (1)

$$\begin{cases} \mu_0 h = C_1 + \frac{N h}{a^2}, \\ h = \alpha k C_1 + \frac{2k N h}{a^3}. \end{cases}$$

Daraus wird dann

$$(10) \quad \begin{cases} C_1 = \bar{\mu} h \cdot \frac{1 - \frac{\mu_0}{\mu} \cdot \frac{2}{\alpha a}}{1 - \frac{2}{\alpha a}} \approx \bar{\mu} h, \\ \frac{N}{a^2} = \frac{\mu_0 - \bar{\mu}}{1 - \frac{2}{\alpha a}} \approx \mu_0 - \bar{\mu}, \end{cases}$$

womit auch $\bar{\mu}$ aus den gemessenen Größen N/a^2 und μ_0 definiert ist. Jetzt ist nachträglich noch zu ersehen, daß die Voraussetzung $\mu_0 \approx \mu$ statthaft ist. Die Verteilungsfunktion hat ihr Maximum $\frac{a}{e}$ bei $\gamma = \frac{1}{a} \cdot a$ hat die Dimension einer Zeit. Daher erklärt sich der im vorigen gewählte Ausdruck „Hauptrelaxationszeit“ für a .

Der bei einem Umlauf auftretende Verlust in der Volumeneinheit berechnet sich nach dem Warburgschen Gesetz zu

$$Q = \frac{1}{4\pi} \left(b h - 2 \int_0^b \xi d\eta \right),$$

woraus mit (1) folgt

$$Q = \frac{1}{4\pi} \left(b h - \frac{2}{k} \int_0^\infty \xi^2 dt \right).$$

Die Ausführung der Quadratur ergibt, wenn der Einfachheit halber

$$\int_0^\infty \frac{e^{-\alpha t}}{(a+t)^3} dt = \frac{\delta}{a^3 \alpha}$$

gesetzt wird, wobei $\delta < 1$ ist,

$$Q = \frac{1}{4\pi} \cdot (\mu_0 - \bar{\mu}) h^2 \cdot \left(1 - \frac{8}{5\alpha a} \cdot \left[\frac{\mu_0}{\bar{\mu}} - 1 + 5 \right] \right),$$

was wiederum wegen $\alpha \gg 1$ übergeht in

$$(11) \quad Q \approx \frac{1}{4\pi} (\mu_0 - \bar{\mu}) h^2 \frac{\text{erg}}{\text{cm}^3 \cdot \text{Umlauf}}.$$

Die quadratische Abhängigkeit von h entspricht den von Jordan festgestellten Zusatzverlusten bei Wechselstromerregung.

Dieser Fall soll jetzt noch näher untersucht werden. Die Vorgänge bei Wechselstromerregung werden durch das Gleichungspaar

$$\begin{aligned}\mathfrak{B}_\gamma &= \bar{\mu} \dot{H} + \gamma(\mu_0 H - \mathfrak{B}_\gamma), \\ H &= \frac{h}{2} e^{j\omega t}\end{aligned}$$

beschrieben, dessen Lösung man in der Form

$$(12) \quad \mathfrak{B}_\gamma = C e^{j\omega t}$$

ansetzen kann, woraus sich

$$(13) \quad C = \frac{\left(\omega^2 + \gamma \frac{\mu_0}{\bar{\mu}}\right) - j\omega\gamma\left(\frac{\mu_0}{\bar{\mu}} - 1\right)}{\omega^2 + \gamma^2} \mu \frac{h}{2}$$

ergibt. Der Verlust errechnet sich nach Warburg unter Benutzung von (7) zu

$$Q_\infty = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\infty H \frac{d\mathfrak{B}_\gamma}{d(\omega t)} d(\omega t) f(\gamma) d\gamma.$$

Wenn man nach Einsetzung von (12) mit (13) von der symbolischen zur reellen Schreibweise zurückkehrt, ergibt sich dafür

$$Q_\infty = \frac{h^2}{16} \omega (\mu_0 - \bar{\mu}) \int_0^\infty \frac{\gamma f(\gamma)}{\omega^2 + \gamma^2} d\gamma.$$

Die Messungen verlangen in einem breiten ω -Bereich Frequenzunabhängigkeit des Verlustes. Wegen der Form der Verteilungsfunktion (8) ist diese Forderung nur zu erfüllen, wenn als Zusatzhypothese

$$(14) \quad a_\infty = \frac{v}{\omega}$$

eingeführt wird. Damit wird dann

$$Q_\infty = \frac{h^2}{16} (\mu_0 - \bar{\mu}) \int_0^\infty \frac{\gamma^2 \cdot \frac{v^2}{\omega} e^{-\gamma \frac{v}{\omega}}}{\gamma^2 + \omega^2} d\gamma.$$

Das auftretende Integral ist von ω unabhängig, wie die Umformung mittels der Substitution $e^{-\gamma \frac{v}{\omega}} = x$ zeigt. Mit ihr wird nämlich

$$\int_0^\infty = v \int_0^1 \frac{\ln^2 x}{v^2 + \ln^2 x} dx = W.$$

Der Nachwirkungsverlust bei Wechselstromerregung beträgt also

$$(15) \quad Q_\infty = \frac{h^2}{16} (\mu_0 - \mu) \cdot W \quad \frac{\text{erg}}{\text{cm}^3 \cdot \text{Umlauf}}$$

in Übereinstimmung mit den bisherigen Messungen.

Die 1935 ermittelte Gleichung für den η -Verlauf beim Gleichstromschaltversuch

$$\eta = C_1 e^{-\alpha t} + C_3 e^{-\gamma t}$$

und die jetzige

$$\eta = C_1 e^{-\alpha t} + N h \cdot \frac{1}{(a + t)^2}$$

stehen im Meßbereich der 1935 untersuchten kleinen Zeiten nicht im Widerspruch zueinander; denn für kleine Zeiten gilt angenähert einmal

$$\eta = C_1 e^{-\alpha t} + C_3 (1 - \gamma t),$$

das andere Mal

$$\eta = C_1 e^{-\alpha t} + \frac{N h}{a^2} \left(1 - \frac{2}{a} t\right),$$

was den gleichen Verlauf ergibt. Nur durch die jetzt über längere Zeiten erstreckten Messungen wurde der Unterschied in den höheren Gliedern bemerkbar.

Die vorgetragenen Rechnungen wollen *nur* eine formale Beschreibung der Vorgänge in den beiden bisher untersuchten Fällen geben, wie es schon die Überschrift dieses Abschnittes andeutet. Daß eine noch ausstehende Theorie, welche die eigentlichen Vorgänge bei der Magnetisierung statistisch zu erfassen hätte, auch für allgemeinere Kenntnisse über die Wirkungsweise der Spingebiete im inneren Felde einen Fortschritt bedeuten würde, wird jedoch ersichtlich geworden sein.

Auf experimentellem Gebiet dürften Untersuchungen an Einkristallen am ehesten unsere Kenntnisse erweitern können.

Zusammenfassung

Es wird darauf hingewiesen, daß bei der Magnetisierung ein strenger Unterschied zu machen ist zwischen Zustands- und Vorgangsgleichungen. Unter der Voraussetzung nur kleiner Feldstärken wird dann gezeigt, daß die Vorgangsgleichung

$$\mathfrak{B}_\gamma = \bar{\mu} \dot{H} + \gamma (\mu_0 H - \mathfrak{B}_\gamma)$$

heißt, wobei sich \mathfrak{B} zu

$$\mathfrak{B} = \int_0^\infty \mathfrak{B}_\gamma \cdot f(\gamma) d\gamma$$

berechnet. Die Schaltversuche verlangen für die Verteilungsfunktion

$$f(\gamma) = a^2 \gamma e^{-\gamma a},$$

während den Wechselstromversuchen nur durch den formalen Ansatz

$$f(\gamma) = \left(\frac{v}{\omega}\right)^2 \cdot \gamma \cdot e^{-\gamma \cdot \left(\frac{v}{\omega}\right)}$$

gerecht zu werden ist. Beide Formen der Verteilungsfunktion sind vielleicht als Grenzfälle einer allgemeineren Gleichung aufzufassen, welche die Form (8) mit

$$a = \frac{\frac{v}{2\pi}}{\frac{1}{\tau} + \frac{1}{T}}$$

haben könnte. Darin ist T als Dauer des ganzen Vorganges zu verstehen. Für den Gleichstromfall ist $T = \infty$, also $a = \frac{v\tau}{2\pi}$; für große ω wird $a = \frac{v}{\omega}$.

Diese beiden Ausdrücke für a sind in den vorgetragenen Rechnungen benützt worden.

Der Beginn der Arbeit wurde ermöglicht durch die Deutsche Forschungsgemeinschaft. Die Durchführung der Arbeit erleichterten die Herren Prof. Steinke und Stuart durch Herleihung der benötigten Instrumente und Institutsmittel. Ihnen allen sei auch an dieser Stelle nochmals herzlichst dafür gedankt.

Königsberg Pr., I. Physikalisches Institut der Universität, den 29. September 1936.

(Eingegangen 8. September 1937)

**Das Wiedemann-Franzsche Gesetz
in Kristallen beliebiger Kristallform
Von Max Kohler**

Die Elektronentheorie der Metalle vermag nur wenige allgemeine Gesetze abzuleiten, ohne spezielle Voraussetzungen über die Anisotropie der Wärmeschwingungen, die Eigenwertverteilung, oder die Anzahl der Valenzelektronen machen zu müssen, Voraussetzungen, die die Gültigkeit der abgeleiteten Gesetze häufig auf einen engen Bereich beschränken. Insbesondere was die Erscheinungen in nicht-kubischen Metallkristallen anbelangt, ist man kaum über qualitative Aussagen hinausgekommen. Im folgenden wird gezeigt, daß das Wiedemann-Franzsche Gesetz unabhängig von irgendwelchen spezialisierenden Voraussetzungen abgeleitet werden kann. Es ist allein durch die Annahme der Elektronenleitung festgelegt für Metalle beliebiger Kristallstruktur.

Wir gehen dazu aus von einer früheren Arbeit¹⁾, in der eine allgemeine Lösung der statistischen Fundamentalgleichung in Anwesenheit eines elektrischen Feldes und eines Temperaturgradienten gegeben ist. Für höhere Temperaturen ($T > \Theta$) lassen sich die dort gegebenen Formeln noch etwas vereinfachen, indem man in diesem Fall die Zusammenstöße der Elektronen mit den Gitterwellen als elastisch betrachten kann²⁾. Es ist die Energie eines Elektrons E vor dem Stoß gleich der Energie E' nach dem Stoß. Es folgt für den elektrischen Strom und den Wärmestrom, wenn wir ein rechtwinkliges Koordinatensystem zugrundelegen:

$$J_k = \sum_{l=1}^3 \left[\sigma_{kl} \left(F_l - \frac{kT}{e} \frac{\partial \lg A}{\partial x_l} \right) + \beta_{kl} \frac{\partial T}{\partial x_l} \right] \quad (k = 1, 2, 3),$$

$$w_k = \sum_{l=1}^3 \left[-T \beta_{kl} \left(F_l - \frac{kT}{e} \frac{\partial \lg A}{\partial x_l} \right) + \lambda_{kl} \frac{\partial T}{\partial x_l} \right].$$

Dabei sind F_l , $\frac{\partial T}{\partial x_l}$ ($l = 1, 2, 3$) die Komponenten des elektrischen Feldes bzw. des Temperaturgradienten, k die Boltzmannkonstante,

1) M. Kohler, Ann. d. Phys. [5] 27. S. 201. 1936.

2) L. Nordheim, Proc. Roy. Soc. London 119. S. 689. 1928.

e die Ladung des Elektrons, h die Plancksche Konstante. Die Fermiverteilung ist gegeben durch:

$$f_0 = \frac{1}{\frac{1}{A} \cdot \frac{E}{e^{kT}} + 1}$$

Die Tensorkomponenten σ_{kl} , β_{kl} , λ_{kl} sind definiert durch folgende Integrale [nach (18) a. a. O.]:

$$\begin{aligned} \sigma_{kl} &= -\frac{2e^2}{h^2} \left\{ \int \left[0(\mathfrak{R}) + \frac{1}{\frac{\partial E}{\partial \mathfrak{R}_l}} \right. \right. \\ &\quad \left. \cdot \int L'(\mathfrak{R}, \mathfrak{R}') \left(\frac{\partial E}{\partial \mathfrak{R}_l} \right)' d\tau_{\mathfrak{R}'} \right] \frac{\partial f_0}{\partial E} \frac{\partial E}{\partial \mathfrak{R}_k} \frac{\partial E}{\partial \mathfrak{R}_l} d\tau_{\mathfrak{R}} \left. \right\} \left. \begin{aligned} f_0(1-f_0)0(\mathfrak{R}) \\ &= M(\mathfrak{R}) \\ L'(\mathfrak{R}, \mathfrak{R}') &= \\ L(\mathfrak{R}, \mathfrak{R}') f_0(1-f_0) \\ d\tau_{\mathfrak{R}} &= \\ d\mathfrak{R}_x d\mathfrak{R}_y d\mathfrak{R}_z \\ d\tau_{\mathfrak{R}'} &= \\ d\mathfrak{R}_x' d\mathfrak{R}_y' d\mathfrak{R}_z' \end{aligned} \right\} \\ \beta_{kl} &= \frac{2e}{h^2 T} \left\{ \int \left[0(\mathfrak{R}) + \frac{1}{\frac{\partial E}{\partial \mathfrak{R}_l}} \right. \right. \\ &\quad \left. \cdot \int L'(\mathfrak{R}, \mathfrak{R}') \left(\frac{\partial E}{\partial \mathfrak{R}_l} \right)' d\tau_{\mathfrak{R}'} \right] \frac{\partial f_0}{\partial E} E \frac{\partial E}{\partial \mathfrak{R}_k} \frac{\partial E}{\partial \mathfrak{R}_l} d\tau_{\mathfrak{R}} \left. \right\} \\ \lambda_{kl} &= \frac{2}{h^2 T} \left\{ \int \left[0(\mathfrak{R}) + \frac{1}{\frac{\partial E}{\partial \mathfrak{R}_l}} \right. \right. \\ &\quad \left. \cdot \int L'(\mathfrak{R}, \mathfrak{R}') \left(\frac{\partial E}{\partial \mathfrak{R}_l} \right)' d\tau_{\mathfrak{R}'} \right] \frac{\partial f_0}{\partial E} E^2 \frac{\partial E}{\partial \mathfrak{R}_k} \cdot \frac{\partial E}{\partial \mathfrak{R}_l} d\tau_{\mathfrak{R}} \left. \right\} \end{aligned}$$

Indem wir folgende Abkürzung einführen:

$$\tau(\mathfrak{R}) = 0(\mathfrak{R}) + \frac{1}{\frac{\partial E}{\partial \mathfrak{R}_l}} \int L'(\mathfrak{R}, \mathfrak{R}') \left(\frac{\partial E}{\partial \mathfrak{R}_l} \right)' d\tau_{\mathfrak{R}'}$$

folgt:

$$\sigma_{kl} = e^2 I_{kl}^{(0)}, \quad \beta_{kl} = -\frac{e}{T} I_{kl}^{(1)}, \quad \lambda_{kl} = -\frac{1}{T} I_{kl}^{(2)},$$

wobei

$$-I_{kl}^{(m)} = \frac{2}{h^2} \int \frac{\partial E}{\partial \mathfrak{R}_k} \cdot \frac{\partial E}{\partial \mathfrak{R}_l} \tau(\mathfrak{R}) \cdot \frac{\partial f_0}{\partial E} \cdot E^m d\tau_{\mathfrak{R}}.$$

$\tau(\mathfrak{R})$ entspricht einer anisotropen Streuzeit. Zur Ausführung dieser Integrale führen wir im \mathfrak{R} -Raum die Energie E als eine der unabhängigen Variablen ein, und bezeichnen das Flächenelement der Flächen $E = \text{const}$ mit dF , dann wird:

$$d\tau_{\mathfrak{R}} = dF \cdot \frac{dE}{|\text{grad}_{\mathfrak{R}} E|} \quad (\text{grad}_{\mathfrak{R}} E)_k = \frac{\partial E}{\partial \mathfrak{R}_k} \quad \text{usw.}$$

Somit:

$$-I_{kl}^{(m)} = \int P_{kl}(E) E^m \frac{\partial f_0}{\partial E} dE,$$

wobei:

$$P_{kl}(E) = \frac{2}{h^2} \int \frac{\partial E}{\partial \mathfrak{R}_k} \cdot \frac{\partial E}{\partial \mathfrak{R}_l} \tau(\mathfrak{R}) \frac{dF}{|\text{grad}_{\mathfrak{R}} E|}.$$

Von nun ab wollen wir uns auf die vorkommenden Strukturen der wirklichen Metalle beschränken, das sind die kubischen, hexagonalen, trigonalen und tetragonalen Strukturen. Wir legen die x_3 -Achse in die Hauptachse, die beiden anderen beliebig senkrecht dazu. In diesem Koordinatensystem haben die vorkommenden Tensoren 2. Ranges σ_{kl} , β_{kl} , λ_{kl} nur je höchstens zwei verschiedene Komponenten. Es ist¹⁾:

$$\sigma_{11} = \sigma_{22}, \quad \beta_{11} = \beta_{22}, \quad \lambda_{11} = \lambda_{22}, \\ \sigma_{kl} = \lambda_{kl} = \beta_{kl} = 0,$$

wenn ($k \neq l$). Für kubische Kristalle ist auch

$$\sigma_{11} = \sigma_{33}, \quad \beta_{11} = \beta_{33}, \quad \lambda_{11} = \lambda_{33}.$$

Wenn ein elektrischer Strom in der x_1 -Richtung fließt, so ist

$$F_2 = F_3 = 0.$$

Und es folgt für die elektrische Leitfähigkeit || der x_1 -Achse:

$$\sigma_{11} = e^2 I_{11}^{(0)} = e^2 P_{11}(\zeta)$$

(in 0. Näherung, ζ = Konstante der Fermiverteilung für Temperatur T .)

Fließt ein Wärmestrom in der x_1 -Richtung, so ist

$$\frac{\partial T}{\partial x_2} = \frac{\partial T}{\partial x_3} = 0.$$

Außerdem muß man $J_1 = 0$ setzen. Es folgt:

$$F_1 - \frac{kT}{e} \frac{\partial \lg A}{\partial x_1} = - \frac{\beta_{11}}{\sigma_{11}} \cdot \frac{\partial T}{\partial x_1}.$$

Damit

$$w_1 = \left(\lambda_{11} + \frac{T \beta_{11}^2}{\sigma_{11}} \right) \frac{\partial T}{\partial x_1}$$

und für die Wärmeleitfähigkeit senkrecht zur Hauptachse erhält man:

$$A_{11} = \frac{1}{T} \left(I_{11}^{(2)} - \frac{(I_{11}^{(1)})^2}{I_{11}^{(0)}} \right).$$

1) Vgl. etwa W. Meissner, Handb. d. Exp. Phys. Bd. XI, 2. Teil S. 17.

Wir benötigen die Integrale $I_{11}^{(m)}$ bis zur 1. Näherung. Es ist bekanntlich:

$$I_{11}^{(m)} = \zeta^m P_{11}(\zeta) + \frac{\pi^2}{6} (kT)^2 \frac{d^2}{d\zeta^2} [\zeta^m \cdot P_{11}(\zeta)].$$

Es wird:

$$I_{11}^{(0)} = P_{11}(\zeta) + \frac{\pi^2}{6} P_{11}''(\zeta) (kT)^2,$$

$$I_{11}^{(1)} = \zeta P_{11}(\zeta) + \frac{\pi^2}{6} (kT)^2 [\zeta P_{11}''(\zeta) + 2P_{11}'(\zeta)],$$

$$I_{11}^{(2)} = \zeta^2 P_{11}(\zeta) + \frac{\pi^2}{6} (kT)^2 [\zeta^2 P_{11}''(\zeta) + 4\zeta P_{11}'(\zeta) + 2P_{11}(\zeta)].$$

Durch Einsetzen und beschränken auf lineare Glieder in T folgt für die Wärmeleitfähigkeit senkrecht zur Hauptachse:

$$(1) \quad \Delta_{11} = \frac{\pi^2}{3} k^2 P_{11}(\zeta) \cdot T.$$

Damit folgt für das Verhältnis von Δ_{11} zu $\sigma_{11} \cdot T$:

$$L_{11} = \frac{\Delta_{11}}{\sigma_{11} \cdot T} = \frac{\pi^2}{3} \cdot \frac{k^2}{e^2} = 2,45 \cdot 10^{-8} \left(\frac{\text{Volt}}{\text{Grad}} \right)^2.$$

Das ist genau der Wert, den Sommerfeld für freie Elektronen abgeleitet hat. Dieselbe Rechnung läßt sich auch für den Fall parallel Hauptachse durchführen, und man erhält ebenfalls das obige Resultat. Dieses Ergebnis ist ganz allgemein abgeleitet. Die einzige Voraussetzung, die gemacht werden mußte, ist die, daß das Elektronengas stark entartet ist, sonst in (1) noch höhere Potenzen in T zu berücksichtigen sind.

Da die Wiedemann-Franzsche Zahl für Kristalle parallel und senkrecht der Hauptachse gleich ist, folgt sofort auch, daß die Wiedemann-Franzsche Zahl überhaupt unabhängig von der Orientierung der Kristallstäbe ist.

In Tab. 1 sind die vorliegenden Messungen an Einkristallen zusammengetragen. Die für die verschiedenen Orientierungen und Metalle gefundenen Werte gruppieren sich in der Tat ziemlich nahe um den theoretischen Wert. Die etwas höheren Werte von Hg dürften wegen der geringeren metallischen Leitfähigkeit auf die Gitterleitung zurückzuführen sein. Dasselbe wird in verstärktem Maße bei Bi der Fall sein, dessen Werte wesentlich höher liegen, als der theoretische. Außerdem wird dort die Nichtentartung schon von Bedeutung sein. Die Gitterleitung kann anisotrop sein, so daß sich dadurch eine Anisotropie der Wiedemann-Franzschens Zahl ergibt. Auch der Einfluß schwacher Entartung des Elektronengases kann Anisotropien erzeugen.

Tabelle 1

Die Wiedemann-Franzsche Zahl nichtkubischer Einkristalle.
Für Kristalle \parallel und \perp zur Hauptachse

Metall	+ °C	$L \cdot 10^8$	Nach Messungen von:
Zn $\left\{ \begin{array}{l} \parallel \\ \perp \end{array} \right.$	20	2,52	Goens und Grüneisen ¹⁾
	20	2,49	
Cd $\left\{ \begin{array}{l} \parallel \\ \perp \end{array} \right.$	20	2,37	Goens und Grüneisen ¹⁾
	20	2,44	
Hg $\left\{ \begin{array}{l} \parallel \\ \perp \end{array} \right.$	-77	2,55	Reddemann ²⁾
	-77	2,55	
Bi $\left\{ \begin{array}{l} \parallel \\ \perp \end{array} \right.$	18	3,07	Kaye und Roberts ³⁾
	18	3,40	
Zn $\left\{ \begin{array}{l} \parallel \\ \perp \end{array} \right.$	57	2,16	Cinnamon ⁴⁾ . Die Werte für die elektrische Leitfähigkeit stammen von Tyndall u. Hoyem ⁵⁾
	57	2,16	

Zusammenfassung

Unter allgemeinsten Voraussetzungen wird gezeigt, daß auch in nichtkubischen Metallkristallen die Wiedemann-Franzsche Zahl unabhängig von der Orientierung der Kristallstäbe den Wert $2,45 \cdot 10^{-8} \left(\frac{\text{Volt}}{\text{Grad}} \right)^2$ besitzt. Vorausgesetzt ist nur starke Entartung der Elektronenverteilung, reine Elektronenleitung, und $T > \theta$. Diese universelle Folgerung der Elektronentheorie der Metalle steht in guter Übereinstimmung mit den Experimenten an Zn-, Cd- und Hg-Kristallen.

1) E. Goens u. E. Grüneisen, Ann. d. Phys. [5] **14**. S. 164. 1932.2) H. Reddemann, Ann. d. Phys. [5] **14**. S. 139. 1932.3) C. Kaye u. K. Roberts, Proc. Roy. Soc. London **104**. S. 98. 1923.4) C. A. Cinnamon, Phys. Rev. **46**. S. 215. 1934.5) E. P. T. Tyndall u. H. G. Hoyem, Phys. Rev. **38**. S. 820. 1931.

Berlin, 1. Institut für Theoretische Physik der Universität.

(Eingegangen 16. Oktober 1937)

Die elastische Nachwirkung und ihr Zusammenhang mit der optischen Nachwirkung*)

Von Heinrich Mussmann

(Mit 22 Abbildungen)

Einleitung

Das Problem der elastischen Nachwirkung wurde bereits mehrfach in dem physikalischen Schrifttum behandelt. Dabei sind die angegebenen Formeln für die Nachwirkungserscheinungen entweder auf rein empirischem Wege gefunden worden, ohne daß dabei auf die Ursachen der Erscheinungen, d. h. auf die inneren Vorgänge im Material eingegangen wurde, oder sie sind das Ergebnis einer theoretischen Betrachtung, die von irgendwelchen von vornherein geforderten Annahmen ausgeht, die eine einfachere mathematische Erfassung des Problems ermöglichen sollen. Derartige phänomenologische Erklärungen der elastischen Nachwirkung bzw. der Relaxation finden wir in den Arbeiten von Maxwell, Wiechert, Boltzmann; wobei die letztere wohl die allgemeinste Theorie enthält, auf die sich fast alle anderen Theorien durch passende Wahl der sogenannten Nachwirkungsfunktion¹⁾ zurückführen lassen. Diese Funktion gibt uns den Einfluß des Spannungszustandes, in dem sich der Körper die Zeit τ vor der Beobachtungszeit t befunden hat, auf den Nachwirkungsvorgang zur Zeit t an. Unter der Annahme, daß der Einfluß der zu verschiedenen Zeiten vorhandenen Spannungen superponiert werden kann, findet man nach Boltzmann für die Zeitabhängigkeit der Dehnung bei zeitlich konstanter Belastung σ den Ausdruck

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma}{E} \left(1 + \alpha \int_0^{\infty} \varphi(\omega) \cdot d\omega \right),$$

wobei $\omega = t - \tau$ ist.

Bei der experimentellen Nachprüfung des von Boltzmann vorausgesetzten Superpositionsprinzips konnte Jordan²⁾ Widersprüche zwischen den Beobachtungen und der Theorie nachweisen. Besonders stark war die Abweichung von der Theorie bei zyklischer Lastveränderung, bei der der Stab zunächst von $E\varepsilon_1$ auf $E\varepsilon_2$ belastet

*) Dissertation der Mathematisch-naturwissenschaftlichen Fakultät der Universität Göttingen.

und danach wieder auf $E\epsilon_1$ entlastet wurde. Die Nachwirkung der zuerst aufgebrachten Spannung $E\epsilon_1$ tritt nach Durchlaufen des Belastungszyklus nicht wieder im vollen Umfange hervor, wie es die Boltzmannsche Theorie verlangt. Eine physikalische Erklärung der Nachwirkungserscheinungen wurde von R. Becker³⁾ gegeben, der von Versuchsergebnissen von v. Wartenberg⁴⁾ ausgehend die Nachwirkung durch plastische Inhomogenität deutet. Seine Überlegungen führen auf einen Ausdruck, den man ebenfalls als einen Sonderfall der Boltzmannschen Formel auffassen kann. Es treten also bei ihm gleichfalls die oben beschriebenen Unstimmigkeiten zwischen Theorie und Versuch auf. Es sei hier nicht weiter auf die außerordentlich umfangreiche Literatur über die elastische Nachwirkung eingegangen. Eine umfassende Darstellung der wichtigsten Arbeiten über dieses Gebiet findet man in dem Artikel von H. Fromm⁵⁾ „Nachwirkung und Hysteresis“ im Handbuch der technischen und physikalischen Mechanik.

Durchsichtige amorphe Stoffe, die unter einem ebenen Spannungszustand optisch anisotrop werden, wie Glas, Zelluloid, Bakelit und ähnliche zeigen neben einer meist sehr starken elastischen Nachwirkung auch einen optischen Nachwirkungseffekt. Es soll hier als optische Nachwirkung die zeitabhängige Abweichung von dem von Neumann⁶⁾ gefundenen Grundgesetz der Spannungsoptik

$$\delta = \frac{C}{\lambda} (\sigma_1 - \sigma_2) \cdot d$$

(δ = Gangunterschied zwischen außerordentlichem und ordentlichem Strahl, C = spannungsoptische Konstante, λ = Wellenlänge des verwendeten Lichts, $(\sigma_1 - \sigma_2)$ = Hauptspannungsdifferenz, d = Dicke der Scheibe)

bezeichnet werden. Über die Art des Zusammenhanges, der ja sicherlich zwischen optischem und elastischem Nachwirkungseffekt bestehen wird, findet man im spannungsoptischen Schrifttum noch die verschiedensten Meinungen. An Arbeiten zu diesem Problem seien erwähnt: Bjerken⁷⁾, Leick⁸⁾, Rossi⁹⁾, Filon und Jessop¹⁰⁾, Nisida¹¹⁾, Kuno¹²⁾ und Yuasa, Fukui und Onishi¹³⁾.

Die vorliegende von Herrn Prof. Dr. Prandtl angeregte Arbeit stellt sich nun die Aufgabe, die Erscheinung der elastischen Nachwirkung in bezug auf ihre Abhängigkeit von Last und Zeit einer eingehenden experimentellen Untersuchung zu unterziehen und das im Experiment gefundene Tatsachenmaterial mit Hilfe des Prandtlischen Gedankenmodells zur kinetischen Theorie der festen Körper zu erklären. Außerdem soll die Beziehung zwischen dem mechani-

schen und spannungsoptischen Verhalten eines durchsichtigen amorphen Stoffes untersucht werden.

Die Versuche wurden im Institut für angewandte Mechanik der Universität Göttingen durchgeführt. Ich bin Herrn Prof. Dr. phil. Dr.-Ing. e. h. L. Prandtl für die wohlwollende Beratung und liebenswürdige Unterstützung, mit der er stets die Durchführung dieser Arbeit förderte, zu großem Dank verpflichtet. Ich habe auch Herrn Prof. Dr.-Ing. M. Schuler für das Interesse zu danken, das er immer meinen Untersuchungen entgegenbrachte.

Experimenteller Teil

1. Versuche zur elastischen Nachwirkung

a) Biegeversuche

Es wurden zunächst Biegeversuche an Glas- und Zelluloidstreifen angestellt, deren Versuchsanordnung in Abb. 1 schematisch dargestellt ist. Das eingespannte Ende des Stabes *St* wird durch zwei von entgegengesetzten Seiten stützende starre Auflager gehalten, die 60 mm auseinander lagen. Die Gesamtlänge des Versuchsstabes betrug bei Glas 700 mm und bei Zelluloid 200 mm. Die Last *P*

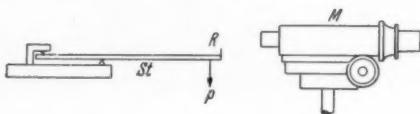


Abb. 1. Schematische Darstellung der Biegeversuchseinrichtung

wurde am Ende des Streifens durch Anhängen von Gewichtstücken aufgebracht. Mit Hilfe eines im Mikroskop befindlichen Okularmikrometerplättchens wurde die Bewegung der am Stabende befestigten Rasierklinge *R* und damit die Durchbiegung des Streifens in Abhängigkeit von der Zeit gemessen. Die

Einspannvorrichtung ließ sich außerdem zur Untersuchung der Temperaturabhängigkeit der Nachwirkung in einen elektrischen Ofen einbauen. Es wurden mit dieser Anordnung nur

Entlastungsversuche durchgeführt, d. h. der

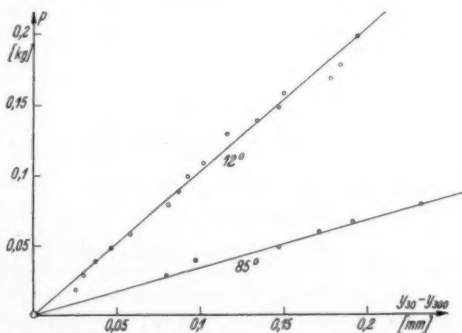


Abb. 2. Nachwirkungs-Last-Diagramm für Zelluloid bei den Temperaturen $\vartheta = 12^{\circ} \text{C}$ und $\vartheta = 85^{\circ} \text{C}$

Stab wurde 2 Min. unter konstanter Last gehalten, dann wurde er entlastet und das allmähliche Zurückgehen der Durchbiegung gemessen.

In Abb. 2 ist für Zelluloid die Differenz der Durchbiegung y_{30} zur Zeit $t = 30$ sec und y_{300} zur Zeit $t = 300$ sec in Abhängigkeit

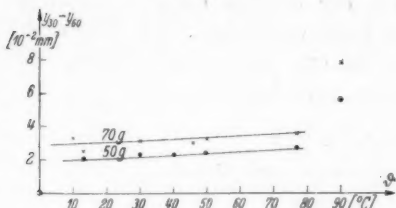


Abb. 3. Abhängigkeit der Nachwirkung von der Temperatur bei Zelluloid für die Lasten $P = 50$ g und $P = 70$ g

von der vorher am Stabe wirkenden Last P für zwei verschiedene Temperaturen aufgetragen. Es ist aus der Abbildung zu erkennen, daß zwischen der Nachwirkung und der Last Proportionalität besteht. Das gleiche Ergebnis wurde für Glas gefunden, bei dem sich die Versuche bis zum Bruch erstreckten. In Abb. 3 ist die Temperaturabhängigkeit der Nachwirkung dargestellt. Man sieht: erst beim Erweichen des Zelluloides hört die Nachwirkung auf, linear mit der Temperatur zu wachsen.

b) Zugversuche

Neben den soeben beschriebenen Biegeversuchen wurden noch Zugversuche mit Zelluloid*) ausgeführt, dessen mechanische

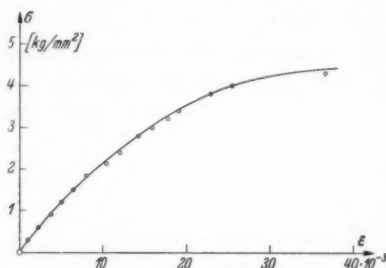


Abb. 4. Spannungs-Dehnungs-Diagramm für Zelluloid

Eigenschaften aus Abb. 4 hervorgehen. Durch diese Versuche sollten erstens der zeitliche Verlauf der Nachdehnung unter konstanter Last, der Einfluß wiederholter Belastungen auf die Nachwirkung und das Verhalten der Nachwirkung bei stufenförmiger Erhöhung und Erniedrigung der Belastung untersucht werden, zweitens der Zusammenhang von Dehnung und optischem Effekt bei Zelluloid geklärt werden.

Da bei diesen Versuchen besonderer Wert darauf gelegt wurde, daß der Körper bei Beginn des Versuches frei von inneren Spannungen

*) Das Material wurde in 3 mm starken Platten von der Rhein. Westf. Sprengstoff A.-G. Troisdorf bezogen. Es enthält nach Angaben dieser Firma 28% Kampfer.

war, so wurde jeder Versuchsstab durch $\frac{1}{2}$ stündiges Erhitzen in Paraffinöl bei 65°C von den Eigenspannungen befreit.

Die Zugbeanspruchung des Probestabes geschah mit Hilfe des in Abb. 5 wiedergegebenen Belastungsgerätes. Die Dehnungen wurden

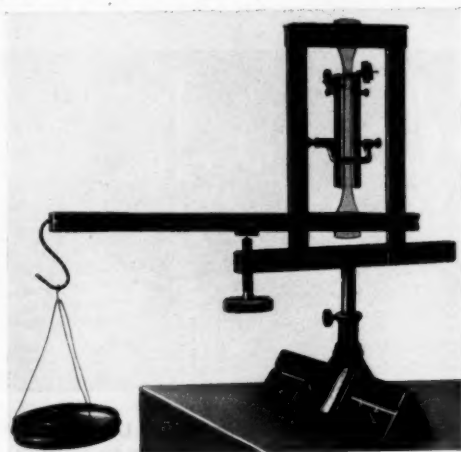


Abb. 5. Belastungsgerät für Zugversuche mit Dehnungsmesser

vermittels eines Martensschen Spiegelapparates gemessen. Wegen der verhältnismäßig großen Formänderung des Zelluloidstabes wurde

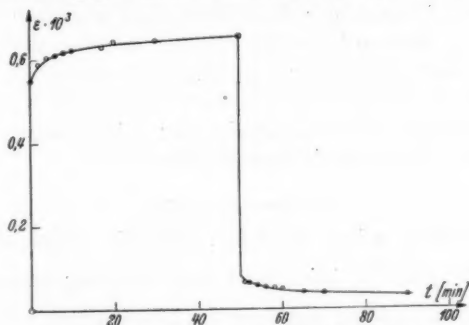


Abb. 6. Zeit-Dehnungs-Diagramm für Zelluloid
(Zugspannung $\sigma = 1,35 \text{ kg/mm}^2$)

an Stelle des sonst gebräuchlichen geraden Maßstabes eine kreisförmig gebogene Skala vom Radius $R = 750 \text{ mm}$ benutzt.

Abb. 6 zeigt ein typisches Zeit-Dehnungs-Diagramm, wie es ein Be- und Entlastungsversuch mit Zelluloid ergab.

2. Spannungsoptische Versuche

a) Versuchseinrichtung

Zur Untersuchung des optischen Effektes wurde ein für spannungsoptische Arbeiten gebräuchliches Gerät (Abb. 7) benutzt, dessen Wirkungsweise schon mehrfach in der Literatur^{14, 15)} beschrieben wurde.

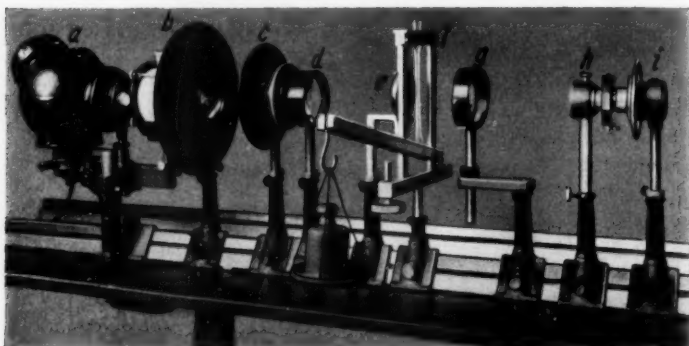


Abb. 7. Gerät für spannungsoptische Untersuchungen.

a Punktlichtlampe mit Kondensator und Kühlkuvette; b Linse;
c Polarisationsprisma; d Linse; e Lochblende; f Belastungsgerät; g Linse;
h Kompensator; i Analysatorprisma

Zur Messung von geringen Phasendifferenzen wurde ein Babinet-kompensator¹⁶⁾ benutzt, der einen Meßbereich von einer Wellenlänge besaß. Betrug der optische Effekt mehr als eine Wellenlänge, so wurde der Drehkompensator von A. Ehrlinghaus^{17)*)} verwendet, womit man noch Gangunterschiede von 7λ messen konnte. Die in Abb. 5 dargestellte Belastungsvorrichtung erlaubt eine gleichzeitige Messung der Dehnung und Doppelbrechung**).

b) Versuchsergebnisse

Die Versuche zeigen zunächst, daß die Phasendifferenz pro Dickeneinheit $\gamma = \frac{\delta}{d}$ keineswegs der Dehnung proportional ist (Abb. 8), sondern daß sie weit über die Elastizitätsgrenze hinaus der Spannung σ proportional ist (Abb. 9).

*) Herrn Dr. Ehrlinghaus bin ich für das Entgegenkommen, mit dem er mir einen Drehkompensator der Firma Winkel, Göttingen zur Verfügung stellte, zu Dank verpflichtet.

**) Herrn Mechanikermeister Hoffmann möchte ich für seine Hilfe danken, die er mir bei der Durchführung dieser Versuche leistete.

Bei Beobachtung der Nachwirkung ergab sich sowohl für den Belastungs- (Abb. 10) wie auch für den Entlastungsversuch (Abb. 11) eine lineare Beziehung zwischen den zeitabhängigen Anteilen der

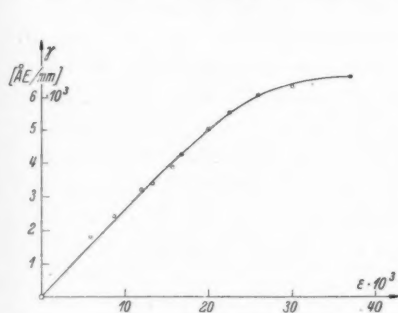


Abb. 8. Darstellung der Abhängigkeit der Doppelbrechung γ von der Dehnung ε

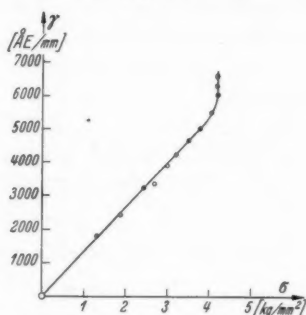


Abb. 9. Darstellung der Abhängigkeit der Doppelbrechung γ von der Spannung σ

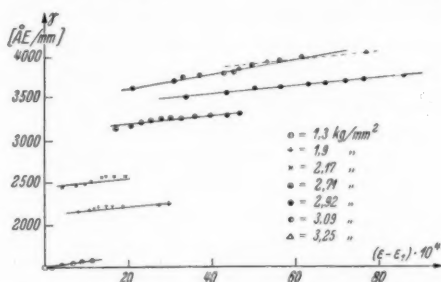


Abb. 10. Zusammenhang von optischer und elastischer Nachwirkung bei verschiedenen Spannungen σ

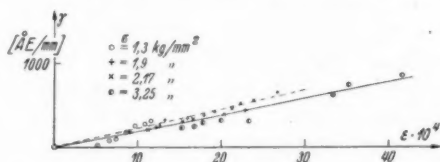


Abb. 11. Zusammenhang von optischer und elastischer Nachwirkung beim Rückkehrversuch

beiden Erscheinungen. Die Versuche zeigen weiter, daß die aus beiden Versuchen sich ergebenden Geraden innerhalb der Versuchsgenauigkeit einander parallel sind.

Die obigen Versuche über den Zusammenhang von Doppelbrechung γ , Dehnung ε und Spannung σ lassen sich durch die Gleichung

$$\gamma = a \cdot \sigma + b \cdot \varepsilon$$

darstellen, wo a und b Materialkonstanten sind.

Für den rein elastischen Versuch ($\sigma = E \cdot \varepsilon_1$) erhält man den Ausdruck

$$\gamma = (a \cdot E + b) \cdot \varepsilon_1$$

(E = Elastizitätsmodul, ε_1 = rein elastische Dehnung).

Für den Nachwirkungsversuch gilt die Gleichung

$$\gamma = \text{const} + b \cdot \varepsilon.$$

Aus Abb. 10 läßt sich a und aus Abb. 11 b bestimmen:

$$a = 0,12 \cdot 10^{-3} \text{ mm}^2/\text{kg},$$

$$b = 0,006.$$

Theoretischer Teil

1. Das Prandtsche Gedankenmodell

L. Prandtl behandelt die Abweichungen der Körper vom rein elastischen Verhalten von einem molekulartheoretischen Standpunkt aus. Er geht in seiner Arbeit „Ein Gedankenmodell zur kinetischen Theorie der festen Körper“¹⁸⁾ von der experimentellen Tatsache aus, daß kristalline Haufwerke im allgemeinen eine sehr viel größere Nachwirkung zeigen als ein störungsfreier Einkristall. Prandtl macht deshalb die Grenzen der einzelnen Kristallite für die Zeitwirkung verantwortlich. Es werden sich zwischen den Gittern zweier Kristalle immer Moleküle befinden, die weder dem einen noch dem anderen der beiden Gitter angehören. Auf diese „freien“ Moleküle werden sicher von den benachbarten Gittern Kräfte ausgeübt. Es ist auch weiterhin anzunehmen, daß jedes dieser freien Massenteilchen an das eine der beiden Gitter fester gebunden ist als an das andere. Es soll zur Vereinfachung angenommen werden, daß sämtliche Molekeln an dem einen Gitter „elastisch“ befestigt sind. Die Wirkung des zweiten Gitters denken wir uns durch ein räumlich periodisches, in erster Näherung sinusförmiges Kraftfeld ersetzt. Als weitere Vereinfachung wird angenommen, daß die freien Massenteilchen nur einen Freiheitsgrad der Bewegung haben. Mit diesen Voraussetzungen baut Prandtl ein Gedankenmodell auf: Die beiden Kristallgitter werden durch zwei parallel gegeneinander verschiebbliche Lineale ersetzt, von denen das eine (A) in regelmäßigen oder unregelmäßigen Abständen mit einer großen Anzahl elastisch befestigter Massenpunkte besetzt ist, die parallel zur Linealachse schwingen

können, das zweite Lineal (B) trägt das periodische Kraftfeld (P_B). Die Formänderung des Körpers wird bei diesem Modell durch die Verschiebung des Lineals (A) gegen das Lineal (B) dargestellt.

Die Abb. 12 soll eine Vorstellung von dem Gedankenmodell geben. Es ist hier angenommen, daß zwischen den beiden Linealen nur ein freier Massenpunkt vorhanden ist. Die Achse des Lineals (A) fällt mit der x -Achse zusammen. Nur in dieser Richtung soll sich der Massenpunkt bewegen können. Senkrecht zur x -Achse ist die elastische Bindungskraft P_A und die periodische Feldkraft P_B aufgetragen. Der Massenpunkt mit der Ruhelage C' findet dann seine Gleichgewichtslage unter der Wirkung von P_A und P_B im Punkt D. Wir sehen aus der Abbildung sofort, daß bei einer geeigneten Verschiebung ξ des Lineals (A) gegen (B) mehrere Gleichgewichtslagen möglich sind. In der obenstehenden Zeichnung können zwei stabile Lagen: D' und D'' und eine labile Lage D''' eintreten.

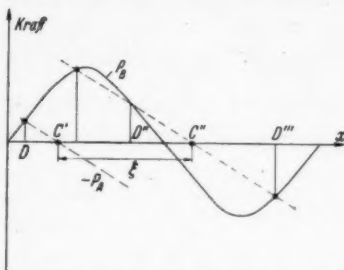


Abb. 12. Gleichgewichtslagen eines „freien“ Massenpunktes unter Einwirkung der elastischen Bindungskraft P_A und der Feldkraft P_B

Beim Vorhandensein unendlich vieler Massenpunkte kann man sich deren Ruhelagen C' über die ganze Wellenlänge verteilt denken. Infolge der Wärmeschwingungen, die bei jedem festen Körper ausgeführt werden, können bei ungewöhnlich großen Amplituden Teilchen ohne Einwirkung äußerer Kräfte in die labile Gleichgewichtslage übergehen, obwohl sie zunächst noch um ein endliches Stück von der labilen Lage entfernt waren. Mit Hilfe dieser Vorstellung und der Boltzmannschen Wahrscheinlichkeitsformel der kinetischen Theorie der Materie konnte Prandtl eine Differentialgleichung für die zeitliche Änderung der Verteilungsdichte μ der Teilchen in der oberen Gleichgewichtslage aufstellen:

$$\frac{d\mu}{dt} = \frac{1}{\tau} \left[(1 - \mu) \cdot e^{-\frac{U_1}{U_m}} - \mu \cdot e^{-\frac{U_2}{U_m}} \right],$$

wobei τ eine charakteristische Zeit und U_m die mittlere Schwingungsenergie ist, während U_1 , U_2 die Energie bedeutet, die zur Erreichung der labilen Lage von der oberen bzw. unteren Gleichgewichtslage aus nötig ist.

Aus dieser Differentialgleichung ergibt sich, wenn U_1 und U_2 entsprechend der jeweils gestellten Aufgabe als Funktionen der Zeit eingesetzt werden, zunächst die Belegungsdichte μ als Funktion der Zeit und damit durch Integration über die Belegung die Kraft zwischen (A) und (B), die die Spannung repräsentiert, in ihrer Abhängigkeit vom Zeitgesetz der Deformation. Die Durchführung der Aufgabe für konstante Fließgeschwindigkeit $\dot{\epsilon}$ liefert eine Beziehung für die Spannung σ_2 , die durch die Formel

$$\sigma_2 = \text{const} \cdot \lambda \sin \left(\frac{\dot{\epsilon}}{\lambda} \right)$$

angenähert werden kann; die Umkehrung dieser Gleichung, die genähert auch für langsam veränderliche $\dot{\epsilon}$ verwendet werden mag, lautet:

$$(1) \quad \dot{\epsilon} = \lambda \cdot \sin \beta \sigma_2;$$

dabei ist λ je nach der „Härte“ des Modells verschieden. Man kann diese Härte mit derjenigen Fließspannung charakterisieren, bei der $\dot{\epsilon}$ beträchtlich wird. Setzen wir diese Fließspannung gleich x und schreiben $\lambda = \frac{k}{\cos \beta x}$, so wird bei $\sigma_2 = x$:

$$\dot{\epsilon} = k \cdot \tan \beta x,$$

also für einigermaßen beträchtliches x ist $\dot{\epsilon} \approx k$. Diese Beziehung rechtfertigt den obigen Ansatz für λ , der im übrigen noch der Forderung zu genügen hatte, daß die „Empfindlichkeit“ λ für Druckspannungen ebenso groß sein soll wie für Zugspannungen.

Es wurde in den obigen Betrachtungen eine ungeordnete Anfangsverteilung der Teilchen vorausgesetzt, die man für die Verformungen verantwortlich macht; denn es wurde ja angenommen, daß die Massenteilchen gleichmäßig über alle Phasen des Kraftfeldes verteilt sein sollen, was ja bei völliger Unordnung sehr vieler Teilchen im Durchschnitt sicher eintreten wird. Wir können deshalb erwarten, daß unsere Modellformeln besonders dann stimmen, wenn sich die Formänderungen in den Korngrenzen abspielen. Weiterhin werden sie aber auch bei solchen Körpern richtig sein, deren Aufbau vollkommene Unordnung aufweist, wie die amorphen Stoffe, Glas, Zelluloid usw. Wir können deshalb versuchen, mit Hilfe des Prandtlschen Gedankenmodells die Vorgänge der Nachwirkung zu erklären.

2. Erklärung der elastischen Nachwirkung

Zur Erklärung der elastischen Nachwirkung stellen wir uns vor, daß das Material aus einem rein elastischen Körper und einer großen Anzahl parallel geschalteter plastisch verformbarer Teilchen

von der Art des oben beschriebenen Modells mit verschiedenen Fließgrenzen α aufgebaut sei; der elastische Körper soll dabei in dem Stoffe immer dominieren. Wir wollen die Betrachtungen zunächst für einen Körper durchführen, der aus einem rein elastischen Teil und einem Modell besteht, das dem elastischen Körper parallel geschaltet ist. Es gilt dann die Gleichgewichtsbedingung

$$(2) \quad \sigma_1 (1 - \alpha) + \alpha \sigma_2 = E \cdot f(t),$$

worin σ_1 die Spannung im elastischen Teil, σ_2 die Spannung im Modell und α das Verhältnis des „Modell“-Querschnittes zum Gesamtquerschnitt des Körpers bedeutet; voraussetzungsgemäß ist α dabei sehr klein.

Unter dem Einfluß einer bestimmten Spannung beginnt das Modell zu fließen. Wir können die Formänderung des Modells als Summe aus einem rein elastischen Anteil σ_2/E und einem unelastischen Teil ansetzen; für den letzteren soll die Gl. (1) gelten. Wir erhalten dann:

$$(3) \quad \dot{\epsilon} = \frac{\dot{\sigma}_2}{E} + k \cdot \frac{\sin \beta \sigma_2}{\cos \beta \alpha}.$$

Da der rein elastische Körper und das Modell parallel geschaltet sind, ist $\dot{\epsilon} = \frac{\dot{\sigma}_1}{E}$. Weiterhin ist im reinen Nachwirkungsversuch die Last konstant, d. h.

$$f'(t) = 0,$$

folglich

$$\dot{\sigma}_1 = - \frac{\alpha}{1 - \alpha} \dot{\sigma}_2.$$

Durch Einsetzen dieses Wertes in (3) bekommen wir eine Differentialgleichung zwischen σ_2 und t :

$$\dot{\sigma}_2 = - (1 - \alpha) \cdot k E \cdot \frac{\sin \beta \sigma_2}{\cos \beta \alpha}.$$

Die Integration dieser Gleichung ergibt:

$$\ln \mathfrak{Fg} \left(\frac{\beta \sigma_2}{2} \right) = - \frac{t - t_1}{A \cos \beta \alpha},$$

wobei $A = \frac{1}{(1 - \alpha) \beta k E}$ gesetzt ist, und t_1 eine Integrationskonstante ist, die von der Vorgeschichte des Materials abhängt.

In einem rein „jungfräulichen“ Material, d. h. in einem Material, in dem im unbelasteten Zustande keine inneren Spannungen vorhanden sind, wird bei unendlich schnellem Übergang zur Zeit $t = 0$ von $\epsilon = 0$ auf $\epsilon = \epsilon_1$, wobei ϵ_1 die rein elastische Dehnung bedeutet,

$$\sigma_2 = E \epsilon_1$$

sein. Aus dieser Bedingung bestimmt sich t_1 zu

$$t_1 = A \cdot \cos \beta x \cdot \ln \operatorname{Irg} \left(\frac{\beta E \varepsilon_1}{2} \right).$$

Wir erhalten also:

$$(4) \quad \sigma_2 = \frac{1}{\beta} \frac{1 + e^{-\frac{t}{A \cos \beta x}} \cdot \operatorname{Irg} \left(\frac{\beta E \varepsilon_1}{2} \right)}{1 - e^{-\frac{t}{A \cos \beta x}} \cdot \operatorname{Irg} \left(\frac{\beta E \varepsilon_1}{2} \right)}.$$

Nach Gl. (2) ist

$$(5) \quad \sigma_1 \approx E \varepsilon_1 - \frac{x}{1-x} \sigma_2.$$

Hieraus folgt:

$$(6) \quad \varepsilon = \frac{\sigma_1}{E} = \varepsilon_1 - \frac{x}{E(1-x)} \sigma_2.$$

Nimmt man nun eine große Anzahl von parallel geschalteten Modellen mit verschiedener Fließgrenze x (in Gleichverteilung in bezug auf x) an, so wird die gesamte Dehnung durch Integration über x erhalten. Wir bekommen also, wenn Gleichverteilung auf alle x angenommen wird, den Ausdruck

$$(7) \quad \varepsilon = \varepsilon_1 - \frac{x}{E \cdot a(1-x)} \int_0^a \sigma_2 \cdot dx,$$

wo a die Streckgrenze des härtesten Teilchens ist. Dabei wird allerdings auch noch vorausgesetzt, daß alle Teilchen dieselbe Materialkonstante β haben, was in Wirklichkeit meist nicht der Fall sein wird.

Zur einfacheren mathematischen Behandlung des Integrales über x wird die Funktion $\sigma_2(x)$, wie sie in (4) angeschrieben ist, in zwei Näherungsfunktionen zerlegt. Die eine gilt für kleine x . Die Logarithmusfunktion läßt sich nämlich in diesem Falle in eine Reihe entwickeln. Man erhält dann bei alleiniger Berücksichtigung des ersten Gliedes der Entwicklung

$$(4a) \quad \sigma_2'(x) = \frac{2}{\beta} e^{-\frac{t}{A \cos \beta x}} \cdot \operatorname{Irg} \left(\frac{\beta E \varepsilon_1}{2} \right).$$

Die zweite Näherungsfunktion gilt für große x und damit auch für große $E \varepsilon_1$. Es läßt sich dann $\cos \beta x = \frac{1}{2} e^{\beta x}$ und

$$\ln \operatorname{Irg} \left(\frac{E \varepsilon_1}{2} \right) = e^{-\beta x}$$

setzen. Daher

$$(4b) \quad \sigma_2''(x) = x - \frac{1}{\beta} \ln \left[\frac{t}{A} + e^{-\beta(E \varepsilon_1 - x)} \right].$$

Man kann dann schreiben:

$$(8) \quad \int_0^a \sigma_2 \cdot dx = \int_0^{x'} \sigma_2' \cdot dx + \int_{x'}^a \sigma_2'' \cdot dx,$$

wobei x' der Punkt sein soll, in dem beide Näherungsfunktionen dasselbe σ_2 ergeben.

Man kann nun näherungsweise setzen:

$$(9) \quad x' = \frac{1}{\beta} \ln \frac{t}{A}.$$

Das erste Integral der rechten Seite von (8) liefert dann zu dem Gesamtintegral nur einen vernachlässigbaren kleinen Anteil, so daß wir schreiben können:

$$(10) \quad \int_0^a \sigma(x) \cdot dx = \int_{x'}^a x \cdot dx - \frac{1}{\beta} \int_{x'}^a \ln \left[\frac{t}{A} + e^{-\beta(E\varepsilon_1 - x)} \right] dx.$$

Das zweite Integral der rechten Seite zerlegen wir wieder in zwei Integrale, nämlich in

$$(11a) \quad \begin{cases} \int_{x'}^{x_1} \ln \frac{t}{A} \cdot dx + \int_{x'}^{x_1} \ln \left[1 + \frac{A \cdot e^{-\beta(E\varepsilon_1 - x)}}{t} \right] dx \\ \text{für} \\ \frac{t}{A} > e^{-\beta(E\varepsilon_1 - x)} \end{cases}$$

und

$$(11b) \quad \begin{cases} \beta \int_{x_1}^a (x - E\varepsilon_1) \cdot dx + \int_{x_1}^a \ln \left[1 + \frac{t \cdot e^{\beta(E\varepsilon_1 - x)}}{A} \right] dx \\ \text{für} \\ \frac{t}{A} < e^{-\beta(E\varepsilon_1 - x)}. \end{cases}$$

Hierbei ist x_1 der Wert von x an der Stelle

$$t = -t_1 = A \cdot e^{-\beta(E\varepsilon_1 - x_1)},$$

folglich

$$(12) \quad x_1 = \frac{1}{\beta} \ln \frac{t}{A} = E\varepsilon_1.$$

In der Gl. (11a) kann man den Integranden des zweiten Integrales in eine Reihe entwickeln:

$$\ln \left[1 + \frac{A \cdot e^{-\beta(E\varepsilon_1 - x)}}{t} \right] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left[\frac{A}{t} \right]^n e^{-n\beta(E\varepsilon_1 - x)}.$$

Dann ergibt sich aus (11a) durch Integration, wenn man noch für die Integrationsgrenzen die in Gl. (9) und (12) angegebenen Werte einsetzt:

$$E \varepsilon_1 \cdot \ln \frac{t}{A} - \frac{1}{\beta} \frac{\pi^2}{12} + \frac{1}{\beta} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} e^{-\beta n E \varepsilon_1}.$$

Das letzte Glied kann man vernachlässigen, da $e^{-\beta E \varepsilon_1}$ immer sehr klein bleiben wird. Die Integration von (11b) ergibt in analoger Weise:

$$\frac{\beta}{2} a - \frac{1}{2\beta} \ln \frac{t}{A} - a \cdot E \varepsilon_1 + \frac{\beta}{2} \cdot (E \varepsilon_1)^2 + \frac{1}{2} \frac{\pi^2}{12} \\ + \text{Glieder, klein von höherer Ordnung.}$$

Es ergibt sich dann als Lösung von (8):

$$(13) \quad \int_0^a \sigma_2 \cdot dx = a \cdot E \varepsilon_1 - \frac{1}{2} \cdot (E \varepsilon_1)^2 - \frac{1}{\beta} E \varepsilon_1 \cdot \ln \frac{t}{A} + \frac{1}{6} \left[\frac{\pi}{\beta} \right]^2.$$

Bei einer erstmaligen Belastung eines jungfräulichen Materials ist die zur Berechnung der Nachwirkung nötige Integration über die Fließgrenze x noch verhältnismäßig einfach, beim Ent- oder

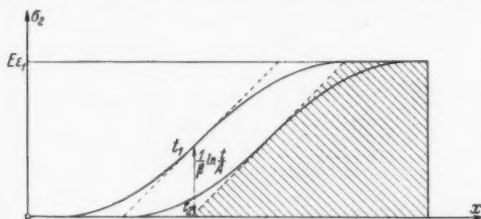


Abb. 13. Verteilung der Spannung σ_2 über die „Härte“ x für zwei Zeiten t_1 und t_2 . Gestrichelt: Annäherung von $\sigma_2(x)$

Wiederbelastungsversuch wird sie aber schon sehr zeitraubend. Es liegt deshalb nahe, in der Vereinfachung noch einen Schritt weiter zu gehen und die Funktion $\sigma_2(x)$ durch einen gebrochenen Linienzug zu ersetzen, wie man es in Abb. 13 sieht.

Man kann sich den Vorgang anschaulich folgendermaßen vorstellen: Alle Spannungen σ_2 , die beim Belastungsvorgang über ihre „Fließgrenze“ kommen würden, sinken in der Zeit t seit diesem Vorgang um $\frac{1}{\beta} \ln \frac{t}{A}$ von der Fließgrenze ab. Die „Fließgrenze“ bedeutet dabei gemäß der Näherungstheorie genau genommen, die Spannung, die die Teilchen zur Zeit $t = A$ nach dem Belastungsvorgang aufweisen. Die Spannungen der „härteren“ Teilchen, die

nicht in die Nähe ihrer Fließgrenze kommen, sollen sich dagegen überhaupt nicht ändern.

Das Integral über $\sigma_2(x)$ ist dann bei dieser Näherung gleich der schraffierten Fläche der Abb. 13. Eine Flächenbetrachtung zeigt, daß

$$(14) \quad \int_0^a \sigma_2 \cdot dx = a \cdot E \varepsilon_1 - \frac{1}{2} (E \varepsilon_1)^2 - \frac{1}{\beta} E \varepsilon_1 \ln \frac{t}{A}$$

ist.

Nach Gl. (7) erhält man für die Dehnung zur Zeit t den Ausdruck

$$(I) \quad \varepsilon = \varepsilon_1 - \frac{x}{1-x} \left(\varepsilon_1 - \frac{1}{2a} \cdot E \varepsilon_1^2 - \frac{1}{a\beta} \cdot \varepsilon_1 \cdot \ln \frac{t}{A} \right).$$

In Worten: Der zeitabhängige Dehnungsanteil ist beim jungfräulichen Belastungsversuch der aufgebrachten Spannung und dem Logarithmus der Zeit proportional.

Das Prandtlische Gedankenmodell führt also bei der angegebenen Mischung der verschiedenen Härtegrade zu demselben Ergebnis, wie die Boltzmannsche Theorie für den Fall $\varphi(\omega) = \frac{1}{\omega}$, und das auch von Bennewitz¹⁹⁾ rein experimentell gefunden wurde.

3. Untersuchung von verschiedenen Belastungsfällen

In diesem Abschnitt sollen für verschiedene Belastungsfälle die Formeln mit Hilfe des Prandtlischen Modellmechanismus abgeleitet werden. Es soll dabei in jedem Fall untersucht werden, ob die Prandtlischen Vorstellungen zu denselben Formeln wie die von Bennewitz gefundenen führen, oder ob bei manchen Belastungsfällen eine Abweichung vorhanden ist.

a) Entlastungsversuch von $\sigma = E \varepsilon_1$ auf $\sigma = 0$

Entlastet man einen Körper, der die Zeit T durch die zeitlich konstante Spannung $\sigma = E \varepsilon_1$ beansprucht wurde, plötzlich auf die Spannung $\sigma = 0$, so wird mit diesem diskontinuierlichen Belastungsübergang auch die σ_2 -Verteilung eine diskontinuierliche Änderung erfahren. Dies ist nur so möglich, daß sich in jedem einzelnen Modell im Augenblick der Entlastung die Spannung σ_2 um den Betrag $E \varepsilon_1$ vermindert, d. h. daß zur Zeit $t = 0$ in jedem Teilchen eine Spannung der Größe $\sigma_2(T) - E \varepsilon_1$ vorhanden ist, wobei $\sigma_2(T)$ die Spannung bedeutet, die das Teilchen bei der Belastung zur Zeit T erreicht hatte. In dem Schaubild von Abb. 14 ist die Spannungsverteilung im Moment vor der Entlastung gestrichelt und im Moment nach der Entlastung punktiert dargestellt. Die schrägen Geraden durch den Nullpunkt bedeuten die „Fließgrenzen“ für die einzelnen Teilchen. Im Verlaufe der Zeit t findet dann ein Absinken des Betrages $|\sigma_2|$ in den einzelnen Modellen um den Betrag $\frac{1}{\beta} \ln \frac{t}{A}$ statt, soweit diese sich der „Fließgrenze“ genähert hatten.

Zur Berechnung von $s(t)$ muß wieder die Größe der schraffierten Fläche (Abb. 14) betrachtet werden, die näherungsweise gleich dem Integral $\int_0^a \sigma_2 \cdot dx$

ist. Der Flächeninhalt des gleichschenkelig rechtwinkligen Dreieckes mit der Hypotenuse

$$E \varepsilon_1 + \frac{1}{\beta} \left(\ln \frac{T}{A} - \ln \frac{t}{A} \right)$$

ist gleich

$$\frac{1}{4} \left[E \varepsilon_1 + \frac{1}{\beta} \left(\ln \frac{T}{A} - \ln \frac{t}{A} \right) \right]^2.$$

Die Größe $\frac{1}{\beta} \left(\ln \frac{T}{A} - \ln \frac{t}{A} \right)$ wird meist klein sein, so daß man ihr Quadrat als klein von zweiter Ordnung in den meisten Fällen vernachlässigen kann. Beim Entlastungsversuch bekommen wir dann für $s(t)$ den Ausdruck

$$(II) \quad s = \frac{\kappa}{a(1-\kappa)} \left[\frac{1}{4} E \varepsilon_1^2 + \frac{1}{2\beta} \cdot \varepsilon_1 \left(\ln \frac{T}{A} - \ln \frac{t}{A} \right) \right].$$

Bennewitz gibt dagegen für diesen Fall

$$(II') \quad s = C \cdot \varepsilon_1 [\ln(T+t) - \ln t]$$

an.

Beide Formeln stimmen in der Aussage überein, daß beim Rückkehrversuch der zeitabhängige Teil von $s(t)$ ebenfalls proportional der Last ist. Die Zeitfunktion hat für große Zeiten t einen anderen Verlauf, für Zeiten t , die gegen T klein sind, stimmt sie dagegen in beiden Formeln nahezu überein bis auf den Faktor C , der bei Bennewitz den gleichen Wert behält wie bei der Belastung, während er nach der Prandtl'schen Theorie nur den halben Wert wie bei der Belastung hat.

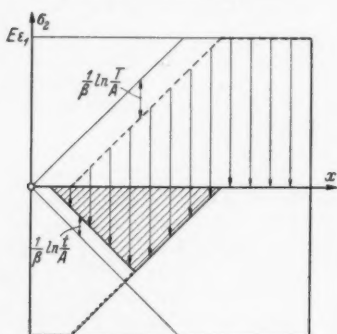


Abb. 14. Schaubild der σ_2 -Verteilung beim Entlastungsversuch. t von dem Zeitpunkt der Entlastung an gerechnet

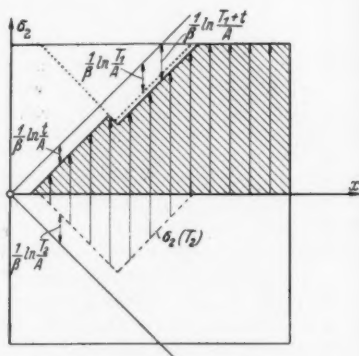


Abb. 15. σ_2 -Verteilung beim Wiederbelastungsversuch

b) Wiederbelastungsversuch von $\sigma = 0$ auf $\sigma = E \varepsilon_1$

Bei der Wiederbelastung eines Stabes, der vor der ersten Entlastung bereits T_1 Sek. durch die Last $\sigma = E \varepsilon_1$ beansprucht wurde, wird die Spannung eines jeden Teilchens den Wert $\sigma_2(T_1) + E \varepsilon_1$ annehmen, wenn $\sigma_2(T_2)$ die Spannung eines Teilchens nach T_2 Sek. Entlastungsdauer bedeutet. Es wird dann zur Zeit t die in Abb. 15 angegebene Spannungsverteilung im Material vorhanden sein, wobei der gestrichelte Geradenzug wieder die Verteilung von

σ_2 im Augenblick *vor* der Wiederbelastung und der punktierte Linienzug die Verteilung im Moment *nach* der Wiederbelastung bedeutet. Eine Flächenberechnung ergibt

$$\int_0^a \sigma_2 \cdot dx = a \cdot E \varepsilon_1 - \frac{1}{2} (E \varepsilon_1)^2 - \frac{1}{2\beta} E \varepsilon_1 \left[\ln \frac{t}{A} + \ln \frac{T_1 + t}{A} \right] + \frac{1}{2\beta^2} \left[\ln \frac{T_1 + t}{A} - \ln \frac{t}{A} \right] \left[\ln \frac{T_2}{A} - \ln \frac{t}{A} \right].$$

Für die Dehnung erhält man, wenn man die quadratischen Glieder vernachlässigt, was man in den meisten Fällen tun kann,

$$(III) \quad \varepsilon = \varepsilon_1 - \frac{\kappa}{1 - \kappa} \left[\varepsilon_1 - \frac{1}{2a} E \varepsilon_1^2 - \frac{1}{2a\beta} \varepsilon_1 \left(\ln \frac{t}{A} + \ln \frac{T_1 + t}{A} \right) \right].$$

Die Bennewitzsche Formel lautet für diesen Belastungsfall

$$(III') \quad \varepsilon = \varepsilon_1 + C \cdot \varepsilon_1 [\ln (T_1 + T_2 + t) - \ln (T_2 + t) + \ln t].$$

c) Überlagerungsversuch von $E \varepsilon_1 \rightarrow E \varepsilon_2$

Auf einen Körper habe T Sek. die Spannung $E \varepsilon_1$ gewirkt. Es hat sich dann in diesem die in Abb. 16 gestrichelt dargestellte Spannungsverteilung $\sigma_2(T)$ ausgebildet. Bei einer plötzlichen Belastungssteigerung von $E \varepsilon_1$ auf $E \varepsilon_2$, wobei der Unterschied $E \cdot (\varepsilon_2 - \varepsilon_1)$ groß gegenüber $\frac{1}{\beta} \ln \frac{T}{A}$ sein soll, stellt sich im Augenblick unmittelbar nach der Belastung die in Abb. 16 punktiert gezeichnete Spannungsverteilung ein. Es findet nun wieder ein langsames

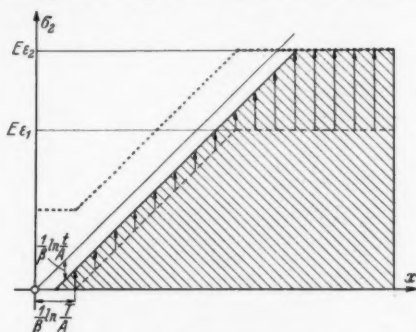


Abb. 16. $\sigma_2(t, x)$ beim Überlagerungsversuch von $E \varepsilon_1$ auf $E \varepsilon_2$

Absinken der Spannung σ_2 in der Zeit t (t vom Moment der Spannungserhöhung an gerechnet) um den Betrag $\frac{1}{\beta} \ln \frac{t}{A}$ statt. Zur Zeit t ist also kein merklicher Einfluß der Spannung $E \varepsilon_1$ auf die Nachwirkung unter $E \varepsilon_2$ zu verspüren, es hat sich vielmehr dieselbe Nachwirkung ergeben, die man bekommen würde, wenn man den Stab zur Zeit $t = 0$ sofort vom unbelasteten Zustande auf die Spannung $E \varepsilon_2$ belastet hätte. Man erhält also für diesen sogenannten Überlagerungsversuch von $E \varepsilon_1 \rightarrow E \varepsilon_2$ folgenden Ausdruck

$$(IV) \quad \varepsilon = \varepsilon_2 - \frac{\kappa}{1 - \kappa} \left[\varepsilon_2 - \frac{1}{2a} E \varepsilon_2 - \frac{1}{a\beta} \varepsilon_2 \cdot \ln \frac{t}{A} \right].$$

Nach den Bennewitzschen Formeln muß sich in diesem Falle ein deutlicher Einfluß der vorhergegangenen Spannung $E s_1$ auf die zeitabhängige Dehnung unter $E s_2$ zeigen. Es wird sich zur Zeit t der Dehnung

$$s = s_1 + C \cdot s_1 \cdot \ln(T + t),$$

die unter $E s_1$ entstanden ist, noch ein kleiner Dehnungsanteil überlagern, der von der Spannungserhöhung $E(s_2 - s_1)$ abhängt, wodurch wir also zu einer Gesamtdehnung

$$(IV) \quad s = s_2 + C \cdot s_1 [\ln(T + t) - \ln t] + C \cdot s_2 \cdot \ln t$$

zur Zeit t kommen. Zu demselben Ergebnis führen natürlich auch die Boltzmannschen Überlegungen, von denen die Bennewitzschen Formeln nur ein Sonderfall sind.

d) Entlastungsversuch von $E s_2 \rightarrow E s_1$

Zum Schluß sei noch ein Entlastungsversuch betrachtet:

Die zur Zeit T unter $E s_2$ vorhandene σ_2 -Verteilung (in Abb. 17 gestrichelter Linienzug) geht im Augenblick der Entlastung von $E s_1$ auf $E s_2$

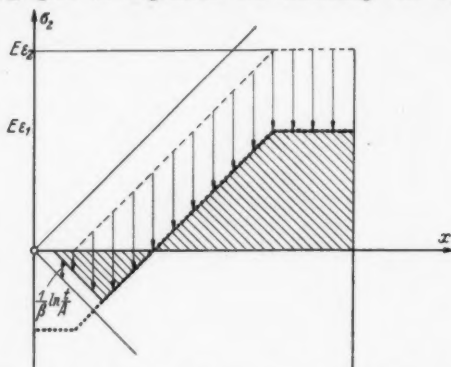


Abb. 17. Schaubild von σ_2 beim Entlastungsversuch von $E s_2$ auf $E s_1$

sprunghaft in die Abb. 17 punktiert dargestellte Verteilung über, wobei man wieder voraussetzen muß, daß $E(s_2 - s_1)$ groß gegenüber $\frac{1}{\beta} \ln \frac{T}{A}$ ist. Im Verlauf der Zeit t wird sich die σ_2 -Verteilung wieder ändern, wobei man beachten muß, daß sich nur der links unten liegende Teil mit der Zeit t verändert. Für das Integral über x zur Zeit t erhalten wir aus der Flächenbetrachtung der schraffierten Fläche den Ausdruck

$$a \cdot E s_1 - \frac{1}{2} (E s_1)^2 - \frac{1}{4} (E s_1 - E s_2)^2 - \frac{1}{\beta} E s_1 \cdot \ln \frac{T}{A} - \frac{1}{2\beta} E (s_2 - s_1) \cdot \left(\ln \frac{T}{A} - \ln \frac{t}{A} \right) - \frac{1}{4\beta} \left(\ln \frac{T}{A} - \ln \frac{t}{A} \right)^2,$$

woraus sich mit Hilfe der Gl. (7) die Dehnung s berechnen läßt. Man ersieht schon aus obiger Formel, daß nach der Prandtlischen Theorie praktisch nur ein Rückfließen auftreten wird. Sowohl Boltzmann wie auch Bennewitz behaupten dagegen, daß zunächst ein langsames Rückfließen infolge der Entlastung von $E s_2$ auf $E s_1$ eintritt, daß dann aber die Spannung $E s_1$ sich bemerkbar macht, so daß sich die Richtung des zeitabhängigen Dehnungsanteiles umkehren wird und wieder ein Vorwärtsfließen einsetzen wird.

4. Vergleich der Theorie mit den Versuchsergebnissen

Es sollen nunmehr die oben erhaltenen Formeln mit Versuchsergebnissen verglichen werden, die bei Zugversuchen erhalten wurden. Zur Prüfung des Zusammenhanges der Nachdehnung mit der Zeit wurde in Abb. 18 die Differenz der Dehnung zur Zeit t (ϵ_t) und der Dehnung zur Zeit 1 Min. ($\epsilon_{1 \text{ min}}$) in Abhängigkeit von $\log t$ für den Belastungsversuch aufgetragen. Man sieht: das logarithmische Gesetz ist erfüllt. Das gleiche gilt beim Entlastungsversuch.

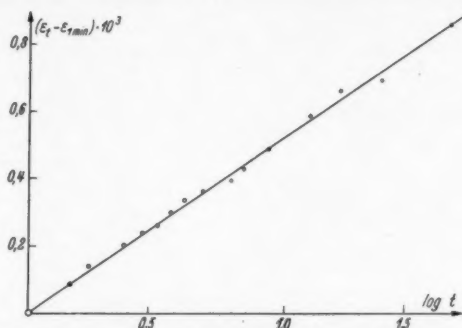


Abb. 18. Nachdehnung in Abhängigkeit vom Logarithmus der Zeit beim Belastungsversuch

Wir sahen weiterhin oben, daß zwischen den Bennewitzschen und den Prandtlischen Formeln Unterschiede bestehen. Um entscheiden zu können, welche der Formeln die Vorgänge besser beschreibt, wurden eine Reihe Zugversuche unternommen, auf die jetzt eingegangen werden soll. Es wurde dabei folgende Auftragung der Ergebnisse benutzt: Es wurde $\dot{\epsilon} = \frac{d\epsilon}{dt}$, wie es sich aus der Theorie von a) Prandtl, b) Bennewitz durch Differentiation der Formeln nach der Zeit t ergibt, über $(\frac{d\epsilon}{dt})_{\text{exp.}}$, das experimentell gefundene $\dot{\epsilon}$ aufgetragen. Dann muß die richtige Theorie in dieser Auftragung eine Gerade liefern, während man bei falschen Formeln ein Sternbild erhalten wird.

In Abb. 19 sind in dieser Auftragung die Ergebnisse eines jungfräulichen Zugversuchs (Fall I in der Abbildung) mit anschließendem Rückkehrversuch (Fall II) dargestellt. Man sieht, daß die Prandtlische Vorstellung (Abb. 19a) in diesem Falle die Versuche besser beschreibt, als es die Bennewitzschen Formeln tun.

Abb. 20 zeigt das Resultat eines wiederholten Belastungsversuches, und zwar dauerte die erstmalige Belastung nur 30 Sek. Zur Berechnung von $\dot{\epsilon}_{\text{theor.}}$ wurden die in Tab. 1 zusammengestellten

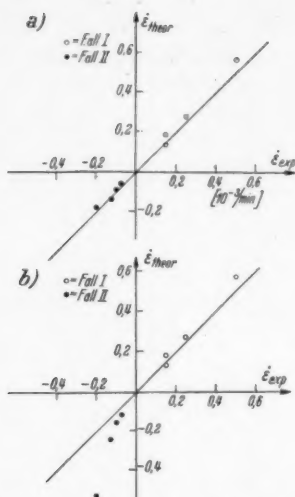


Abb. 19. Jungfräulicher Belastungsversuch mit anschließendem Rückkehrversuch. a) Prandtl; b) Bennewitz

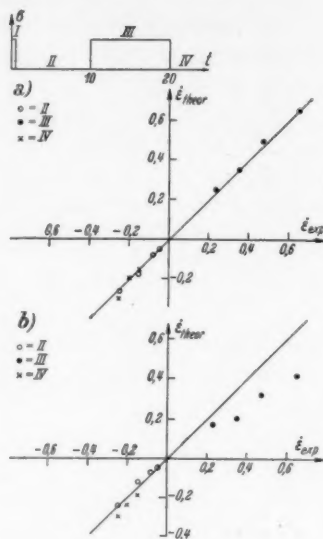


Abb. 20. Wiederbelastungsversuch. a) Prandtl; b) Bennewitz

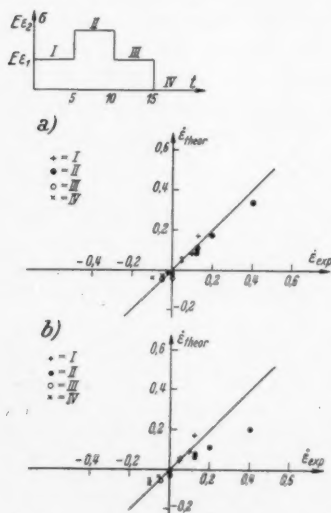


Abb. 21. a) Prandtl; b) Bennewitz

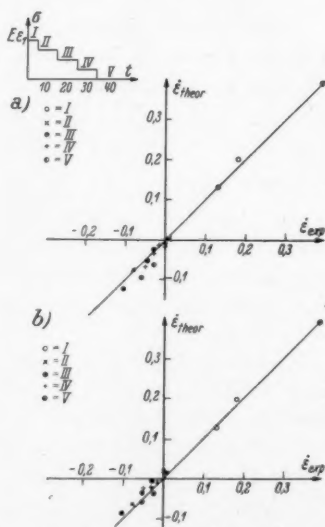


Abb. 22. Entlastungsversuch in 4 Stufen. a) Prandtl; b) Bennewitz

Formeln benutzt, die sich aus den Gl. (II) bzw. (II') und (III) bzw. (III') ableiten lassen. Es zeigte sich, daß man in diesem Falle zur richtigen Erfassung der experimentellen Ergebnisse die quadratischen Glieder von $\ln t$ nicht vernachlässigen darf. In Tab. 1 ist t immer von der letzten Laständerung an gerechnet, und es ist gesetzt

$$\alpha = \frac{x}{(1-x) \cdot a E \beta}.$$

Tabelle 1

Fall	$\dot{\epsilon}_{\text{theor. nach Prandtl}}$
I	$\frac{\alpha \cdot E \epsilon_1}{t}$
II	$-\frac{\alpha}{2} \cdot \frac{1}{t} \left(E \epsilon_1 + \frac{1}{\beta} \cdot \ln \frac{T_1}{t} \right)^*$
III	$\frac{\alpha}{2} \left(E \epsilon_1 \left(\frac{1}{t} + \frac{1}{T_1 + t} \right) - \frac{1}{\beta} \left[\ln \frac{T_2}{t} \left(\frac{1}{T_1 + t} - \frac{1}{t} \right) - \frac{1}{t} \ln \frac{T_1 + t}{t} \right] \right)$
IV	$-\frac{\alpha}{2t} \left(E \epsilon_1 + \frac{1}{\beta} \ln \frac{T_2}{t} \right)$

Fall	$\dot{\epsilon}_{\text{theor. nach Bennewitz}}$
I	$\frac{C \cdot \epsilon_1}{t}$
II	$C \cdot \epsilon_1 \cdot \left(\frac{1}{T_1 + t} - \frac{1}{t} \right)$
III	$C \cdot \epsilon_1 \cdot \left(-\frac{1}{T_1 + T_2 + t} - \frac{1}{T_2 + t} + \frac{1}{t} \right)$
IV	$C \cdot \epsilon_1 \cdot \left(\frac{1}{T_1 + T_2 + T_3 + t} - \frac{1}{T_2 + T_3 + t} + \frac{1}{T_3 + t} - \frac{1}{t} \right)$

Auch in diesem Falle geben die Prandtischen Formeln bei Berücksichtigung der quadratischen Glieder von $\ln t$ die Versuche besser wieder als die Bennewitzschen.

Für den in Abb. 21 untersuchten Belastungszyklus liegen die Punkte in der oberen Auftragung ebenfalls wieder besser auf einer Geraden als in der unteren. Die Prandtische Erklärung ist also auch hier wieder die bessere. Die zur Auftragung der Abb. 21 benutzten Formeln enthält die Tab. 2; die Zeit T ist dabei gleich 5 Min. zu setzen.

Die Abb. 22 gibt uns einen Entlastungsversuch wieder, bei dem von der Spannung $E \epsilon_2 = 4 \cdot E \epsilon_1$ in vier gleichen Stufen auf die

Tabelle 2

Fall	$\dot{\epsilon}_{\text{theor. nach Prandtl}}$	$\dot{\epsilon}_{\text{theor. nach Bennewitz}}$
I	$\alpha \cdot \frac{E \epsilon_1}{t}$	$C \cdot \frac{\epsilon_1}{t}$
II	$\alpha \cdot \frac{E \epsilon_2}{t}$	$C \cdot \epsilon_1 \left(\frac{1}{T+t} - \frac{1}{t} \right) + C \cdot \epsilon_2 \cdot \frac{1}{t}$
III	$-\alpha \cdot \frac{E \cdot (\epsilon_2 - \epsilon_1)}{2t}$	$-C \cdot (\epsilon_2 - \epsilon_1) \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{T+t} \right) + C \cdot \epsilon_2 \cdot \frac{1}{2T+t}$
IV	$-\alpha \cdot \frac{E \epsilon_2}{2t}$	$-C \cdot \epsilon_1 \left(\frac{1}{t} + \frac{1}{3T+t} \right) - C(\epsilon_2 - \epsilon_1) \left(\frac{1}{T+t} - \frac{1}{2T+t} \right)$

Spannung Null entlastet wurde. Man kann in diesem Fall keine Aussage darüber machen, ob die Prandtlsche oder die Bennewitzsche Darstellung die richtigere ist, da beide etwa die gleiche Streuung aufweisen. In Tab. 3 sind die zu diesem Versuch gehörigen Formeln zusammengestellt.

Tabelle 3

$T = T_1 = 5 \text{ Min.}$

Fall	$\dot{\epsilon}_{\text{theor. nach Prandtl}}$	$\dot{\epsilon}_{\text{theor. nach Bennewitz}}$
I	$4\alpha \cdot \frac{E \epsilon_1}{t}$	$4C \cdot \frac{\epsilon_1}{t}$
II	$-\frac{\alpha}{2t} \left(E \epsilon_1 + \frac{1}{\beta} \ln \frac{T}{t} \right)$	$C \cdot \epsilon_1 \left(\frac{4}{T+t} - \frac{1}{t} \right)$
III	$-\frac{\alpha}{t} \left(E \epsilon_1 + \frac{1}{2\beta} \ln \frac{T}{t} \right)$	$C \cdot \epsilon_1 \left(\frac{4}{3T+t} - \frac{1}{2T+t} - \frac{1}{t} \right)$
IV	$-\frac{3\alpha}{2t} \left(E \epsilon_1 + \frac{1}{\beta} \ln \frac{T}{t} \right)$	$C \cdot \epsilon_1 \left(\frac{4}{5T+t} - \frac{1}{4T+t} - \frac{1}{2T+t} - \frac{1}{t} \right)$
V	$-\frac{\alpha}{t} \left(2E \epsilon_1 + \frac{1}{2\beta} \ln \frac{T}{t} \right)$	$C \cdot \epsilon_1 \left(\frac{4}{7T+t} + \frac{1}{6T+t} - \frac{1}{4T+t} - \frac{1}{2T+t} - \frac{1}{t} \right)$

Eine Auftragung der Nachwirkungsversuche von Filon an Xylonit, der selbst zur Beschreibung seiner Versuche eine Potenzformel angab, zeigte, daß sich auch diese Versuche gut durch die Prandtlschen Formeln wiedergeben lassen.

Es wurde bereits oben (S. 121) erwähnt, daß Jordan in einer Arbeit auf Abweichungen von der Boltzmannschen Theorie bei Überlagerungsversuchen an Eisen von der Art des Versuchs in Abb. 21

hingewiesen hat. Man kann diese Widersprüche zwischen Experiment und Theorie beseitigen, wenn man zur Beschreibung der Jordanschen Versuche die Prandtlschen Formeln der Tab. 2 benutzt. In der oben zitierten Arbeit wird noch eine weitere Unstimmigkeit mit Boltzmann erwähnt.

Beim *Belastungsversuch* mit Zink genügt die Nachwirkung der Formel

$$\varepsilon - \varepsilon_1 = p_1 \cdot \lg t,$$

während sie sich beim *Entlastungsversuch* darstellen läßt durch

$$\varepsilon = p_2 [\lg(T + t) - \lg t].$$

p_1 und p_2 nehmen aber je nach den Versuchsbedingungen sehr verschiedene Werte an; es ist nämlich bei einem ersten Versuch nach langer Ruhepause p_1 sehr viel größer als p_2 , bei Wiederholung der Belastung nach einer nicht allzulangen Zeit ist p_1 jedoch *kleiner* geworden, während p_2 unverändert geblieben ist.

Die Versuchsergebnisse sagen nichts anderes aus als die Prandtlschen Formeln (I) bis (III) des vorigen Abschnittes. Man sieht also, daß die Vorstellungen des Gedankenmodells auch auf die Zeitwirkungen des kristallinen Haufwerkes anwendbar sein können, bei denen man die Substanz zwischen den Gittern — wo ja die vom Modell geforderte Unordnung vorhanden sein wird — für die Nachwirkungserscheinungen verantwortlich machen kann.

Zusammenfassung

Es werden Versuche an *Glas* und *Zelluloid* beschrieben, die den Zusammenhang der elastischen Nachwirkung mit der Zeit und der aufgebrachten Last klären sollen. Es zeigen die Versuchsergebnisse, daß bei *Glas* bis zum Bruch und bei *Zelluloid* bis zur Elastizitätsgrenze Proportionalität zwischen der elastischen Nachwirkung und der wirkenden Spannung herrscht, und daß der zeitabhängige Formänderungsanteil proportional dem Logarithmus der Zeit zunimmt. Die Untersuchung des Temperatureinflusses auf die Nachwirkungserscheinungen beim *Zelluloid* ergibt, daß diese bis fast zur Erweichungstemperatur des Materials linear mit der Temperatur zunehmen.

Für die Beziehung von elastischem und optischem Verhalten des *Zelluloides* unter Spannungen wird ein empirisches Gesetz der Form

$$\gamma = a \cdot \sigma + b \cdot \varepsilon$$

angegeben.

Auf Grund des Prandtlschen Gedankenmodells wird für die Erscheinungen der elastischen Nachwirkung eine theoretische Erklärung gegeben. Die abgeleiteten Formeln stimmen in den wich-

tigsten Fällen mit den Versuchen überein. In zwei Belastungsfällen, wo die Boltzmannsche Betrachtungsweise andere Werte angibt, sieht man, daß das Gedankenmodell die bessere Darstellung der experimentellen Ergebnisse liefert. Die Anwendung der Prandtl'schen Gleichungen auf Versuche von Jordan mit Metallen läßt vermuten, daß die Modellformeln auch für kristalline Haufwerke gelten.

Schrifttum

- 1) L. Boltzmann, Wissenschaftliche Abhandlungen, Leipzig 1909. Bd. I. S. 616.
- 2) H. Jordan, Verh. d. D. Phys. Ges. **17**. S. 423. 1915.
- 3) R. Becker, Ztschr. f. Phys. **33**. S. 423. 1925.
- 4) W. v. Wartenberg, Verh. d. D. Phys. Ges. **20**. S. 120. 1918.
- 5) H. Fromm, Handb. d. phys. u. techn. Mech., Bd. IV, 1. S. 436.
- 6) F. Neumann, Abh. d. Kgl. Akad. d. Wiss. Berlin Teil II. S. 1. 1841.
- 7) P. v. Bjerken, Wied. Ann. **43**. S. 808. 1891.
- 8) A. Leick, Ann. d. Phys. [4] **14**. S. 139. 1904.
- 9) P. Rossi, Rend. di Nap. (III) **17**. S. 207. 1911.
- 10) G. Filon u. H. Jessop, Phil. Trans. (A) **223**. S. 89. 1922.
- 11) M. Nisida, Scient. Pap. Phys. Chem. Res. Tokyo **22**. S. 269. 1933.
- 12) J. Kuno, Phil. Mag. (VII) **16**. S. 353. 1933.
- 13) K. Yuasa, S. Fukui u. F. Onishi, Journ. Soc. Mech. Eng. Japan **36**. Deutsch S. 42. 1933.
- 14) L. Föppl, Festigkeitslehre mittels Spannungsoptik, München 1935.
- 15) G. Mesmer, Ztschr. d. VDI **72**. S. 951. 1928.
- 16) E. Lehr, Spannungsverteilung in Konstruktionsteilen, Berlin 1934. Kap. I, S. 18.
- 17) A. Ehringhaus, Ztschr. f. Krist. **76**. S. 315. 1931.
- 18) L. Prandtl, Ztschr. f. angew. Math. u. Mech. **8**. S. 85. 1928.
- 19) K. Bennewitz, Phys. Ztschr. **21**. S. 703. 1920.

Essen, Kruppstr. 123.

(Eingegangen 5. Oktober 1937)

**Der Elastizitätsmodul ferromagnetischer Stoffe
in Abhängigkeit von der Temperatur
und vom Magnetfeld¹⁾**

Von O. Engler

(Mit 21 Abbildungen)

Einleitung

Über die Temperaturabhängigkeit des „ ΔE -Effektes“, d. h. der Änderung des Elastizitätsmoduls (EM.) ferromagnetischer Stoffe in Abhängigkeit vom Magnetfeld, liegen nur wenige Untersuchungen vor. Die Beziehungen zwischen dem EM., der Eigenspannungsgröße σ_i , der Magnetisierung und der Magnetostraktion wurden auf Grund der Beckerschen Theorie des Magnetismus von M. Kersten²⁾ aufgestellt. Die experimentellen Ergebnisse an Nickel von E. Giebe und E. Blechschmidt³⁾ und O. v. Auwers⁴⁾ bestätigen diese theoretischen Beziehungen.

Die Änderung des EM. in Abhängigkeit vom Magnetfeld, der „ ΔE -Effekt“, ist nach Kersten definiert:

$$\Delta E = E_0 - E$$

wobei, E_0 den EM. im magnetisch gesättigten Zustand und E den in jeweils vorhandenen magnetischen Felde bedeuten. Für die Änderung des EM. gilt:

$$(1) \quad \frac{\Delta E}{E_0} \approx 1 - \frac{1}{1 + \frac{2}{5} \cdot \frac{\lambda_x \cdot E_0}{\sigma_i}}$$

oder

$$(2) \quad \frac{\Delta E}{E_0} \approx \frac{2}{5} \cdot \frac{\lambda_x \cdot E_0}{\sigma_i} \quad \text{falls} \quad \frac{\Delta E}{E_0} \ll 1.$$

1) Dissertation der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät der Universität Jena.

2) M. Kersten, Ztschr. f. Phys. 85. S. 708. 1933; Ztschr. f. Metallkde. 27. S. 97. 1935.

3) E. Giebe u. E. Blechschmidt, Ann. d. Phys. [5] 11. S. 905. 1931.

4) O. v. Auwers, Ann. d. Phys. [5] 17. S. 83. 1933.

Nach R. Becker und M. Kersten¹⁾ gilt für die Anfangsuszeptibilität x_0 bei Nickel folgende Beziehung:

$$(3) \quad x_0 \approx \frac{2}{9} \cdot \frac{J_\infty^2}{\lambda_\infty} \cdot \frac{1}{\sigma_i}$$

wobei J_∞ die Sättigungsmagnetisierung,
 λ_∞ die Sättigungsmagnetostraktion,
 σ_i die Eigenspannungsgröße
 bedeuten.

Durch Einsetzen der Beziehung für die Anfangsuszeptibilität in (1) oder (2) eliminiert sich σ_i :

$$(4) \quad \frac{\Delta E}{E_0} \approx 1 - \frac{1}{1 + \frac{9}{5} \cdot \frac{\lambda_\infty^2 \cdot x_0 \cdot E_0}{J_\infty^2}},$$

$$(5) \quad \frac{\Delta E}{E_0} \approx \frac{9}{5} \cdot \frac{\lambda_\infty^2 \cdot x_0 \cdot E_0}{J_\infty^2}.$$

Die vereinfachte Beziehung (5) wurde von K. Nakamura²⁾ in dem System Fe-Ni bei Zimmertemperatur im reversiblen Gebiet bis zu 40% Nickel qualitativ bestätigt. Im folgenden galt es nachzuprüfen, wie sich der ΔE -Effekt bei höheren Temperaturen verhält, im besonderen wie weit die von Kersten aufgestellten Beziehungen erfüllt sind.

Meßmethode

Als Meßmethode wurde für die Untersuchungen ein von O. v. Auwers³⁾ angegebenes Verfahren benutzt, nach welchem die

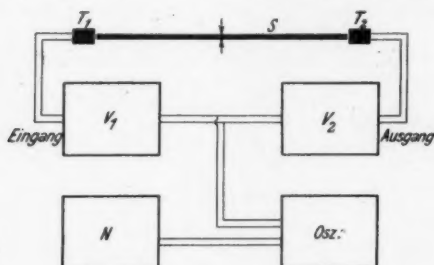


Abb. 1. Schematische Meßanordnung

in der Mitte eingespannten Versuchsstäbe an den Enden durch Aufsetzen von Endplatten mit Hilfe von Topfmagneten zu longitudinalen Schwingungen angeregt wurden.

1) R. Becker u. M. Kersten, Ztschr. f. Phys. **64**. S. 660. 1930.

2) K. Nakamura, Ztschr. f. Phys. **94**. S. 707. 1935.

3) O. v. Auwers, a. a. O.

Das Schaltschema zeigt die Meßanordnung. Durch die Schwingungen des Stabes S wird in der Wicklung des Topfmagneten T_1 eine EMK. induziert, die durch die Verstärker V_1 und V_2 dem erregenden Topfmagneten T_2 eine verstärkte Spannung zuführt, so daß der Stab in seiner longitudinalen Eigenfrequenz selbsterregte Schwingungen ausführt. Zwischen V_1 und V_2 wurde ein Siemenscher Schleifenzillograph angeschlossen, der zur Aufzeichnung der Stabfrequenz diente. Eine vergleichbare Normalfrequenz lieferte eine Röhrenstimmgabel mit einer Frequenz von 1000 Hz.

Durch die experimentell ermittelte Eigenfrequenz des Versuchstabes läßt sich mit Hilfe der Beziehung:

$$E = \frac{4 \cdot f^2 \cdot l^3 \cdot s}{981 \cdot 10^6} \frac{\text{kg}}{\text{mm}^2}$$

der Elastizitätsmodul E bestimmen. Hierbei bedeuten:

f die Eigenfrequenz, l die Länge (cm) und s die Dichte des Probestabes.

Infolge der großen Verstärkung war es möglich, die Endplatten so klein auszubilden, daß die Korrektur, die der EM. dadurch erfährt, vernachlässigbar klein wurde. Die Endplatten waren 1 mm stark und hatten denselben Durchmesser wie der Prüfstab. Sie waren aus weichem Eisen hergestellt, wodurch es möglich wurde, bei Nickel und einigen Legierungen noch Messungen oberhalb des Curiepunktes (CP.) auszuführen, da Eisen bei dieser Temperatur noch ferromagnetisch ist.

Um die erforderlichen Temperaturen zu erzielen, wurde der Prüfstab S und die beiden Topfmagnete T_1 und T_2 in das Innere eines Röhrenofens gesetzt.

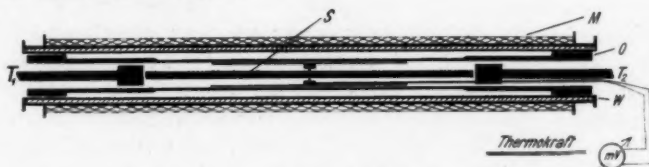


Abb. 2. Anordnung des Prüfstabes im Magnetfeld

Die Skizze stellt die Anordnung im Schnitt dar. Der Stab S wird durch die kegelförmigen Spitzen von drei Schrauben gehalten, die in einem Futter aus Messing senkrecht zur Stabachse zentral angeordnet sind. Diese Anordnung einschließlich des Elektroofens O befindet sich im Innern eines doppelwandigen Rohres W , das durch Wasser gekühlt wird. M stellt die magnetisierende Feldspule dar. Um die empfindlichen Wicklungen der Topfmagnete zu schützen, wurden diese ebenfalls mit kleinen Kühlmänteln versehen.

Elektrofen und Temperaturverlauf. Die Ofenwicklung bestand aus bifilar gewickeltem Chromnickelband, das in Asbest eingebettet war. Den inneren mechanischen Halt gab ein dünnwandiges Messingrohr von 33 mm Innenweite. Die Wärmemenge, die den Stabenden durch die gekühlten Topfmagnete entzogen wurde, konnte durch entsprechende Ausführung der Heizwicklung (Temperaturkompensation) ausgeglichen werden. Die Wicklung bestand aus drei Teilwicklungen, von denen die beiden äußeren doppellagig bifilar gewickelt waren. Die Messung der Temperaturverteilung erfolgte durch sieben auf die gesamte Länge des Stabes verteilte Thermoelemente.

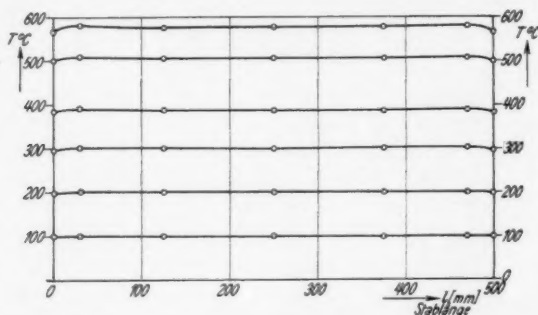


Abb. 3. Temperaturverteilung längs des Prüfstabes

Das Kurvenbild gibt die Temperaturverteilung längs des Stabes wieder. Die größten Abweichungen zwischen Stabmitte und -ende machten bei den höchsten Temperaturen nicht mehr als 2% aus. Nachdem so einmal die Temperaturverteilung experimentell bestimmt war, wurde während der Messungen die Temperatur nur im Einspannfutter gemessen, um dem Stab ein freies Schwingen zu ermöglichen. Der Abstand der Topfmagnete von den Endplatten des Versuchsstabes war etwa 0,5 mm und konnte von beiden Seiten durch Mikrometerschrauben beliebig eingestellt werden.

Magnetfeld. Die Feldspule gestattete magnetische Feldstärken bis zu etwa 600 Oe herzustellen. Die Feldverteilung längs des Stabes wurde experimentell nachgeprüft und ergab an den Enden eine Abnahme der Feldstärke um etwa 2%. Der Feldspule waren an den Enden kleine Kompensationswicklungen aufgesetzt.

Entmagnetisierung. Wegen des großen Stabdurchmessers wurde bei sämtlichen Untersuchungen mit einer Frequenz von 10 Hz entmagnetisiert. Der 10-Perioden Wechselstrom wurde durch eine besondere Maschine, im Prinzip einer „rotierenden Brückenordnung“,

aus Gleichstrom hergestellt. Die Entmagnetisierung erfolgte durch den bekannten Entmagnetisierungsapparat nach Gumlich und Rogowski.

Magnetisierung und Anfangssuszeptibilität. Die Bestimmung der Magnetisierung erfolgte nach der ballistischen Methode mit Hilfe einer einlagigen Induktionsspule. Die Spule mit etwa 50 Windungen war auch für höhere Temperaturen kurzschlußfrei in Glimmerisolation auf ein Hartglasrohr von 13 mm äußerem Durchmesser gewickelt. Für die entsprechende Bestimmung der Anfangssuszeptibilität diente eine ähnliche mehrlagige Probespule mit insgesamt 2000 Windungen, so daß noch bei Feldern von 0,03 Oe sichere Messungen ausgeführt werden konnten. Dadurch war eine sichere graphische Interpolation für $H = 0$ möglich.

Ergebnisse

Untersuchungen an Nickel

Vorbehandlung. Sämtliche Versuchsstäbe hatten eine Länge von etwa 500 mm und einen Durchmesser von 10 mm. Für die Untersuchungen an Nickel stand eine Probe von den Ver. Nickelwerken (Schwerte) zur Verfügung. Die im Anlieferungszustand „weich“ befindliche Probe zeigte bei Zimmertemperatur für den entmagnetisierten und magnetisch gesättigten Zustand einen ΔE -Effekt von 3 ‰. Nach 2 stündigem Glühen bei etwa 700° C und langsamer Abkühlung erhöhte sich $\Delta E/E$ auf etwa 6,3 ‰. Mit der so vorbehandelten Probe wurden alle weiteren Untersuchungen an Nickel ausgeführt. Die Probe hatte einen Reinheitsgrad von etwa 99 ‰ Ni.

Giebe und Blechschmidt und Nakamura erhalten an ihren Proben einen größeren ΔE -Effekt (etwa 17 ‰), was wahrscheinlich durch größeren Reinheitsgrad der Probe und eine entsprechend sorgfältige thermische Vorbehandlung verursacht worden ist.

Meßergebnisse. Die Abb. 4 zeigt die Abhängigkeit des EM. von der Temperatur bei verschiedenen Feldstärken als Parameter. Die Änderung des EM. zwischen gesättigtem und entmagnetisiertem Zustand weist bei 125° C ein Maximum auf, um dann mit Annäherung an die Curietemperatur zu verschwinden. Die EM.-Temperaturkurve zeigt am Curiepunkt einen Knick, der schon wiederholt festgestellt und von Kersten¹⁾ theoretisch begründet wurde.

1) M. Kersten, Ztschr. f. Phys. a. a. O.

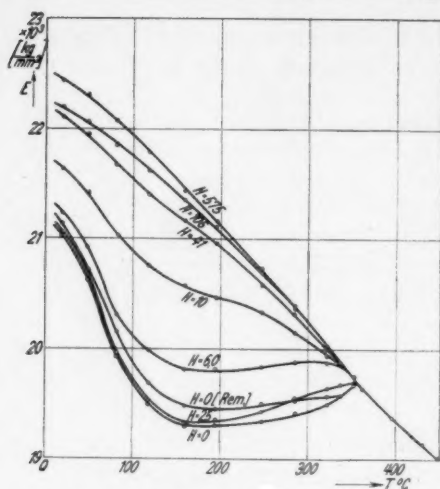


Abb. 4. Der EM. an Nickel in Abhängigkeit von der Temperatur und vom Magnetfeld

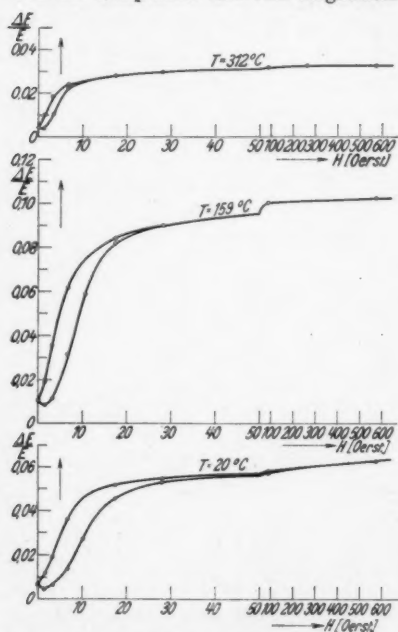


Abb. 5. Hysterese des ΔE -Effektes von Nickel bei drei verschiedenen Temperaturen

Nach Fertigstellung dieser Messungen wurden von S. Siegel und S. L. Quimby¹⁾ Ergebnisse veröffentlicht, die mit diesen Untersuchungen in guter Übereinstimmung stehen.

Abb. 5 gibt die Abhängigkeit des ΔE -Effektes vom magnetischen Feld bei drei verschiedenen Temperaturen wieder. Bei allen Temperaturen tritt Hysterese auf. Die Kurve für 20° C ist qualitativ in guter Übereinstimmung mit Messungen des ΔE -Effektes an Nickel von O. v. Auwers²⁾. Bemerkenswert ist die Abnahme der Schleifenbreite und die Verkleinerung der Schleife mit steigender Temperatur. Bei höheren Temperaturen wird der magnetische Sättigungszustand bereits bei kleineren Feldern erreicht.

Für eine Prüfung der theoretischen Beziehungen nach Kersten, vgl. die Formeln (4) und (5), ist die Kenntnis des Temperaturverlaufes der Anfangsuszeptibilität und der Sättigungsmagnetisierung des untersuchten Nickelstabes notwendig.

1) S. Siegel u. S. L. Quimby, Phys. Rev. **49**. S. 663. 1936.

2) O. v. Auwers, a. a. O.

Deshalb wurde an derselben Probe der Temperaturverlauf des ΔE -Effektes, der Anfangssuszeptibilität x_0 und der Sättigungsmagnetisierung J_∞ bestimmt (Abb. 6). Die Korrektur von x_0 durch den Entmagnetisierungsfaktor macht im Gebiet des Kurvenmaximums (345°C) fast 40% aus, während sie bei Zimmertemperatur nur knapp 10% des gemessenen Wertes beträgt. Die nach oben ausgebuchtete Form der x_0 -Kurve bei etwa 150°C tritt nur bei weichen, geglähten Proben auf. Hartes Nickel zeigt einen glatten, gleichmäßig ansteigenden Temperaturverlauf von x_0 ohne Ausbuchtung bei 150°C , wobei die Absolutwerte wesentlich tiefer liegen. Eine Messung der Temperaturabhängigkeit der Magnetostraktion war im Rahmen dieser Arbeit nicht möglich.

Diskussion der Meßergebnisse. Eine theoretische Auswertung des gefundenen Effektes wurde bereits in der angeführten Arbeit von

Siegel und Quimby im Sinne der Theorie nach N. Akulov¹⁾ versucht. Das auftretende Maximum des ΔE -Effektes erklären die Verf. als ein Sonderverhalten der „inneren Reibung“, da sie bei der Bestimmung der Temperaturabhängigkeit der Dämpfung ihrer Probe an der Stelle des Maximums des ΔE -Effektes ein entsprechendes Minimum der Dämpfung fanden.

Es war naheliegend, den Verlauf des EM. bei höheren Temperaturen an Hand der von Kersten aufgestellten Beziehungen nachzuprüfen. Für die Diskussion der Temperaturabhängigkeit des ΔE -Effektes bei Nickel wurde die Beziehung (4)

$$\frac{\Delta E}{E_0} \approx 1 - \frac{1}{1 + \frac{9}{5} \frac{J_\infty^2 \cdot x_0 \cdot E_0}{J_\infty^2}}$$

benutzt, da $\Delta E/E_0$ nicht $\ll 1$.

1) N. Akulov, Ztschr. f. Phys. 85. S. 661. 1933.

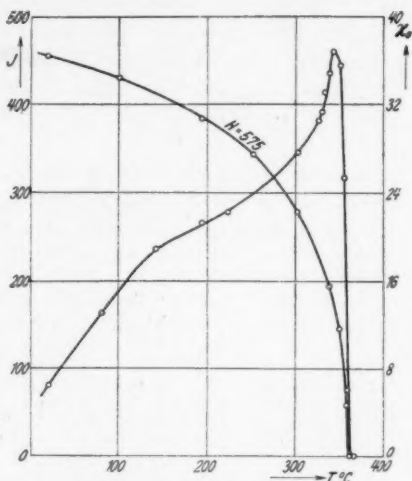


Abb. 6. Magnetisierungsintensität J und Anfangssuszeptibilität x_0 in Abhängigkeit von der Temperatur

Die Temperaturabhängigkeit der Magnetostraktion von Nickel wurde den Untersuchungen von K. Honda und S. Shimizu¹⁾ entnommen (Abb. 7).

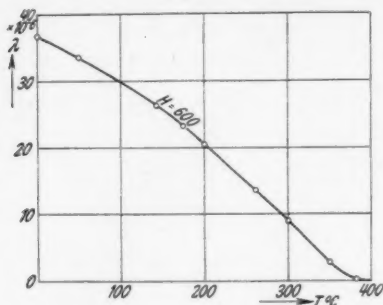


Abb. 7. Die Magnetostraktion von Nickel für die Feldstärke $H = 600$ Oe in Abhängigkeit von der Temperatur. (Nach Honda u. Shimizu)

Es zeigt sich, daß diese berechnete Kurve bis auf einen temperaturunabhängigen Faktor von $f = 0,46$ mit den gemessenen ΔE -Werten gut übereinstimmt. Die untere ausgezogene Kurve stellt die mit dem Faktor 0,46 reduzierte theoretische Kurve dar. Die eingezeichneten Kreuze geben den experimentell bestimmten ΔE -Effekt wieder. Die Abweichungen von 300°C aufwärts sind möglicherweise auf

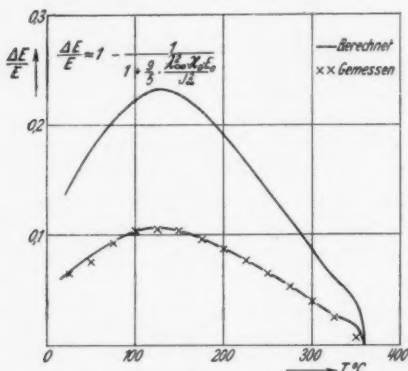


Abb. 8. Diskussion von $\Delta E/E_0$ nach M. Kersten

gut überein mit Untersuchungen von Nakamura.

Nakamura²⁾ untersucht den ΔE -Effekt von Nickel bei Zimmer-

temperaturabhängigkeit der theoretischen Beziehung nach Kersten:

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\Delta E}{E_0} \approx 1 \\ - \frac{1}{1 + \frac{9}{5} \cdot \frac{\lambda_\infty^2 \cdot x_0 \cdot E_0}{J_\infty^2}} \end{array} \right.$$

Einflüsse des Entmagnetisierungsfaktors, der in diesem Gebiet eine große Korrektur des x_0 bedingt, zurückzuführen. Andererseits mangelt es bei diesen hohen Temperaturen an genauen Magnetostraktionsmessungen, was für diese Diskussion sehr kritisch ist, da λ_∞ quadratisch in die Formel eingeht. Der CP. liegt bei Hondas Magnetostraktionsmessungen an Nickel höher (etwa 375°C) als bei der hier benutzten Probe (355°C).

Dieses Ergebnis stimmt

1) K. Honda u. S. Shimizu, Phil. Mag. 6. S. 392. 1903.

2) K. Nakamura, a. a. O.

temperatur und diskutiert seine Ergebnisse an Hand der Formeln von Kersten. Geprüft wird die vereinfachte Beziehung:

$$(6) \quad \frac{1}{\mu_0} \cdot \frac{\Delta E}{E_0^2} = \frac{9}{20\pi} \left(\frac{\lambda_\infty}{J_\infty} \right)^2,$$

welche nach Kersten für ein Ferromagnetikum mit kleinem ΔE -Effekt Gültigkeit hat. Die magnetischen Größen μ_0 , λ_∞ und J_∞ werden den Arbeiten anderer Verff. entnommen. Die Diskussion der Meßergebnisse von Nakamura zeigt, daß der gemessene ΔE -Effekt gegenüber dem theoretisch zu erwartenden Wert um einen Faktor $f = 0,35$ zu klein ist.

In der Diskussion von Nakamura wird vernachlässigt, daß bei der untersuchten Nickelprobe $\Delta E/E_0$ nicht $\ll 1$ ist, da die vereinfachte Formel (6) benutzt wird, die gegenüber der erweiterten Beziehung:

$$(4) \quad \frac{\Delta E}{E_0} \approx 1 - \frac{1}{1 + \frac{9}{5} \frac{\lambda_\infty^2 \cdot x_0 \cdot E_0}{J_\infty^2}}$$

nur beschränkte Gültigkeit hat.

Verwendet man dagegen die allgemein gültige Beziehung (4), so vergrößert sich der Faktor von 0,35 auf 0,51, d. h. der theoretische Wert ist etwa doppelt so groß wie der gemessene. Es erschien darum wertvoll, die in Nakamuras Arbeit mitgeteilten Werte für $\Delta E/E_0$, E_0 , λ_∞ , μ_0 und J_∞ in die Formel (4) von Kersten einzusetzen und mit den hier vorliegenden Ergebnissen zu vergleichen (vgl. Tab. 1).

Tabelle 1

	$E \frac{\text{kg}}{10^3 \text{ mm}^2}$	x_0	$\lambda_\infty \cdot 10^{-6}$	J_∞	$\frac{\Delta E}{E_0}$	$1 - \frac{1}{1 + \frac{9}{5} \frac{\lambda_\infty^2 \cdot x_0 \cdot E_0}{J_\infty^2}}$	Faktor f
Nakamura	19,8	19,8	-40	480	0,17	0,33	0,51
Engler . .	22,4	6,5	-36	455	0,063	0,136	0,46

Die Abweichung der beiden Faktoren $f = 0,51$ und $0,46$ wird durch das in beiden Fällen verschiedene Verhältnis $\frac{\lambda_\infty^2}{J_\infty^2}$ bedingt.

Berechnet man nach Kersten aus der Formel:

$$(1) \quad \frac{\Delta E}{E_0} \approx 1 - \frac{1}{1 + \frac{2}{5} \cdot \frac{\lambda_\infty \cdot E_0}{\sigma_i}}$$

die innere Eigenspannungsgröße σ_i bei verschiedenen Temperaturen, so erhält man folgendes Kurvenbild (Abb. 9).

Es zeigt, daß σ_i zunächst mit ansteigender Temperatur kleiner wird, um dann zwischen 200 und 300° C einem konstanten Werte zuzustreben. Die Abweichungen im Gebiete des CP. sind, wie

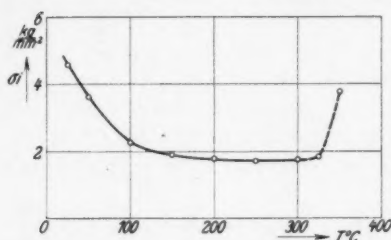


Abb. 9. Die innere Eigenspannungsgröße σ_i in Abhängigkeit von der Temperatur

oben schon erwähnt, auf eine Unsicherheit von Hondas Magnetostraktionswerten für Nickel in dem Temperaturbereich des CP. zurückzuführen.

Untersuchungen an Eisen

Weitere Untersuchungen wurden an Eisen im Temperaturbereich von 20—450° C ausgeführt. Frühere Mit-

teilungen¹⁾ über Untersuchungen des EM. an Eisen und seinen geringen ΔE -Effekt bei Zimmertemperatur ließen für die Temperaturabhängigkeit keine Besonderheiten erwarten.

Zur Verfügung stand eine von der Vakuumschmelze Heraeus gelieferte Eisenprobe (vakuumgeschmolzenes Elektrolyteisen).

Abb. 10 zeigt den Verlauf des EM. in Abhängigkeit von der Temperatur für das Feld $H = 0$ und $H = 575$ Oe. Bemerkenswert ist die Zunahme des ΔE -Effektes mit steigender Temperatur. Bei 450° C ist $\Delta E/E_0$ etwa viermal so groß wie bei Zimmertemperatur. Eine mehrstündige Glühbehandlung mit anschließender langsamer Abkühlung ergab keine Zunahme des ΔE -Effektes.

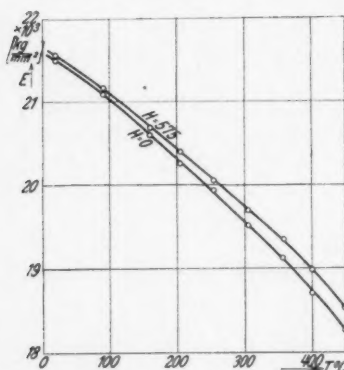


Abb. 10. Der EM. von Eisen in Abhängigkeit von der Temperatur für die Feldstärken $H = 0$ und $H = 575$ Oe

Tabelle 2

$E \frac{\text{kg}}{10^3 \text{ mm}^2}$	α_0	$\lambda_{\infty} \cdot 10^{-6}$	J_{∞}	$\frac{\Delta E}{E}$	$\frac{9}{5} \cdot \frac{\lambda_{\infty} \cdot \alpha_0 \cdot E_0}{J_{\infty}^2}$	Faktor f
21,6	58,1	-10	1700	0,003	0,0078	0,39

1) O. v. Auwers, a. a. O.

Obwohl die Voraussetzung der Theorie, nämlich Richtungsunabhängigkeit der Magnetostriktion bei Eisen nicht erfüllt ist, wurde eine Prüfung der Formel (5)

$$(5) \quad \frac{\Delta E}{E_0} \approx \frac{9}{5} \frac{\lambda_{20} \cdot x_0 \cdot E_0}{J_{20}^2},$$

da $\frac{\Delta E}{E_0} \ll 1$, auch für Eisen versucht. Die Werte für λ_{∞} und J_{∞} wurden der zusammenfassenden Darstellung von Nakamura¹⁾ entnommen. $\Delta E/E_0$, der EM. E_0 und die Anfangsuszeptibilität x_0 wurden an vorliegender Eisenprobe bestimmt. Es ergibt sich annähernd dieselbe zahlenmäßige Abweichung von der Formel wie bei Nickel.

Untersuchungen an Eisen-Nickel-Legierungen

Das anomale Verhalten des ΔE -Effektes von Nickel bei höheren Temperaturen gab Veranlassung, Untersuchungen der Temperaturabhängigkeit des ΔE -Effektes im reversiblen Bereich des Systems Fe-Ni durchzuführen.

Die Behandlung der von der Vakuumschmelze Heraeus gelieferten Probestäbe war folgende:

Die Proben wurden zunächst im Anlieferungszustand „hart“ bei höheren Temperaturen einschließlich des CP. untersucht. Es ergab sich in diesem Falle nur ein kleiner ΔE -Effekt. Darauf wurden die Stäbe einer 5ständigen Glühung bei etwa 700° C unterzogen und über 3 Std. langsam auf Zimmertemperatur abgekühlt. Die Glühtemperatur wurde deshalb so niedrig gewählt, weil bei binären Eisenmischkristallen (Fe-Ni) in diesem Temperaturgebiet die Erholungsfähigkeit der mechanischen Härte²⁾ nach der Kaltbearbeitung einen Sättigungswert erreicht hat, so daß keine Abnahme des EM. durch eine weitere Steigerung der Glühtemperatur zu erwarten ist.

Fe-Ni 93. Anschließend an Nickel wurde eine Legierung mit 93% Nickel (93% Ni, 6,5% Fe, 0,4% Mn, 0,1% Si) untersucht.

Die Darstellung 11 gibt das Verhalten des EM. in geglühtem und hartem Zustande wieder. Der Glühvorgang bewirkt eine erhebliche Vergrößerung des ΔE -Effektes. Abb. 12 zeigt das Verhalten des EM. in Abhängigkeit von der Temperatur bei verschiedenen Magnetfeldern nach dem Glühen. Wie bei der Nickelprobe ist auch bei dieser Legierung noch ein Maximum des $\Delta E/E_0$ vorhanden, jedoch ist es etwas flacher. Um die Lage des CP. nach-

1) K. Nakamura, a. a. O.

2) G. Tammann u. V. Caglioti, Ann. d. Phys. [5] 16. S. 680. 1933.

zuprüfen, wurde im Temperaturbereich des CP. die Magnetisierung bestimmt und in Abb. 12 zum Vergleich mit eingezeichnet (gestrichelt).

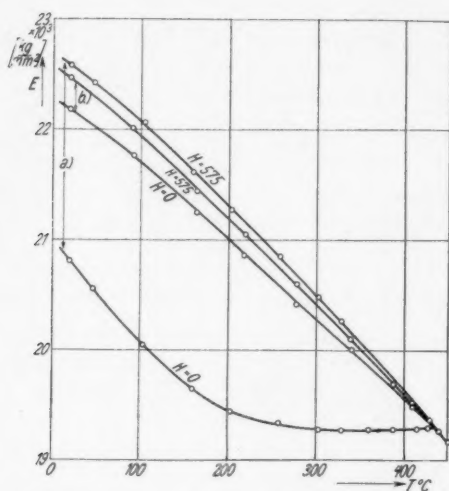


Abb. 11. Der EM. an Fe-Ni 93 in Abhängigkeit von der Temperatur für $H = 0$ und $H = 575$ Oe. a) geglüht, b) hart

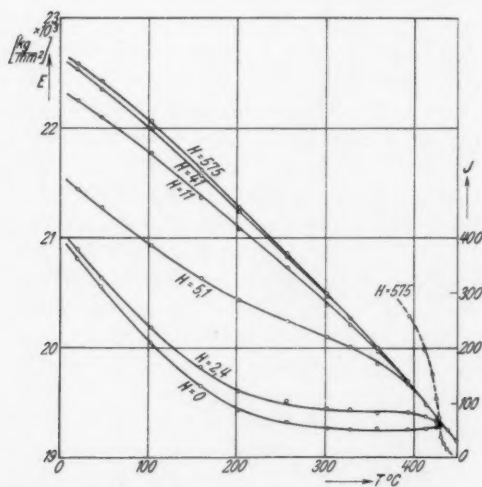


Abb. 12. Der EM. an Fe-Ni 93 in Abhängigkeit von der Temperatur bei verschiedenen Feldstärken

Abb. 13 zeigt die Hysterese des ΔE -Effektes bei drei verschiedenen Temperaturen. Die drei Kurvenbilder zeigen wiederum eine Verkleinerung der Schleife mit zunehmender Temperatur. Eine Remanenz konnte innerhalb der Meßgenauigkeit nicht festgestellt werden.

Fe-Ni 78,5. Über das Verhalten des EM. in Abhängigkeit von der Magnetisierung bei einer Fe-Ni-Legierung von etwa der Zusammensetzung des Permalloy sind in der Literatur wenig Angaben vorhanden. S. Siegel und S. Rosin¹⁾ finden für ein Permalloy (81% Nickel) ein $\Delta E/E_0$ von 0,26%, im gehärteten Zustand 0,11%.

Untersucht wurde eine Probe von der Zusammensetzung 78,5% Ni, 21% Fe, 0,4% Mn, 0,1% Si. Die thermische Vorbehandlung war dieselbe, wie oben beschrieben, da eine sogenannte Permalloybehandlung durch Messungen im Temperaturgebiet des CP. wieder hinfällig geworden wäre. Die Legierung zeigt im Anlieferungszustand bei 20° C ein $\Delta E/E_0$ von 0,4%.

Dieser Wert vergrößert sich nach der Glühbehandlung auf 1,4% (vgl. Abb. 14). Der ΔE -Effekt verschwindet mit steigender Temperatur allmählich. Eine Bestimmung des CP. war in diesem Falle nur durch gleichzeitige Bestimmung der Magnetisierung möglich. Bemerkenswert ist, daß nach der Glühung der EM. sich beträchtlich vergrößert hat.

Fe-Ni 50. Eine Legierung dieser Zusammensetzung zeigt gegenüber anderen Eisen-Nickel-Legierungen nach den Ergebnissen von Nakamura²⁾ bei Zimmertemperatur ein Maximum des ΔE -Effektes. Der Glühvorgang bewirkt bei 20° C eine Zunahme des

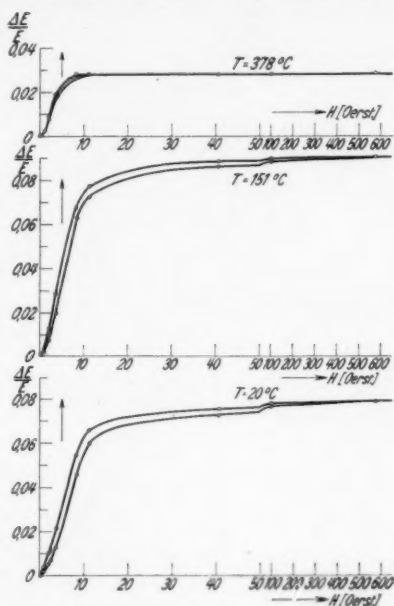


Abb. 13. Hysterese des ΔE -Effektes von Fe-Ni 93 bei drei verschiedenen Temperaturen

1) S. Siegel u. S. Rosin, Phys. Rev. **49**. S. 863. 1936.

2) K. Nakamura, a. a. O.

$\Delta E/E_0$ von 2,0% auf 7,3% (Abb. 15). Nakamura findet dagegen ein $\Delta E/E_0$ von 6,0%.

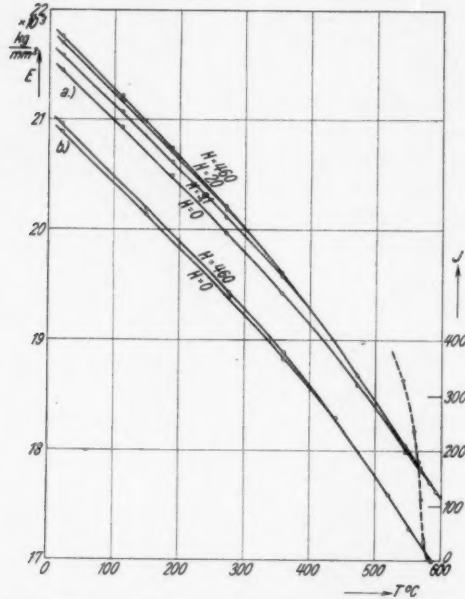


Abb. 14. Der EM. an Fe-Ni 78,5 in Abhängigkeit von der Temperatur bei verschiedenen Feldstärken. a) gegläht, b) hart

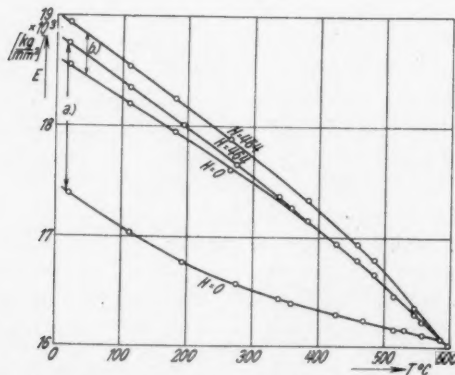


Abb. 15. Der EM. von Fe-Ni 50 in Abhängigkeit von der Temperatur für $H = 0$ und $H = 464$ Oe. a) gegläht, b) hart

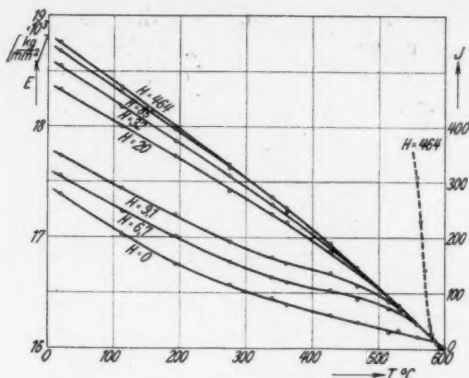


Abb. 16. Der EM. von Fe-Ni 50 in Abhängigkeit von der Temperatur bei verschiedenen Feldstärken

Abb. 16 zeigt die Temperaturabhängigkeit des EM. bei verschiedenen Feldstärken. Die Lage des CP. wird ebenfalls durch Messung der Magnetisierung bestätigt. Der CP. liegt bei dieser Legierung etwa 75°C höher als er von K. Honda¹⁾ angegeben wird.

Abb. 17 zeigt noch drei Hystereseschleifen des ΔE -Effektes bei verschiedenen Temperaturen. Die Schleife wird hier außerordentlich schmal.

Fe-Ni 42. Weiter wurde eine Legierung mit der Zusammensetzung 58 % Fe, 42 % Ni untersucht. In ihren charakteristischen Eigenschaften nähert sie sich bereits dem Typ der Invare. Wie von J. Mc Ide²⁾ gezeigt, haben derartige Legierungen

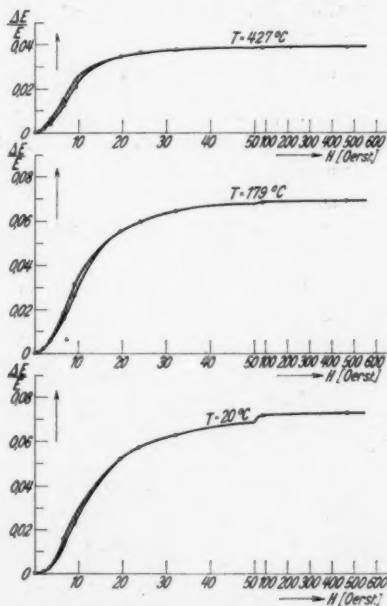


Abb. 17. Hysteresis des ΔE -Effektes von Fe-Ni 50 bei drei verschiedenen Temperaturen

1) K. Honda, Magnetic Properties of Matter. 1928.

2) J. Mc Ide, Proc. Inst. Rad. Eng. 22. S. 177. 1934.

einen positiven Temperaturkoeffizienten des EM., wie in Abb. 18 aus der andersartigen Kurvensteigung ersichtlich ist. Interessant ist die Tatsache, daß der Temperaturkoeffizient des EM. bei magnetischer Sättigung am CP. sein Vorzeichen ändert.

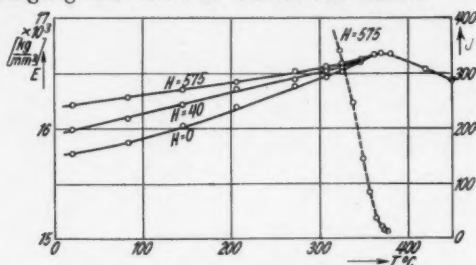


Abb. 18. Der EM. von Fe-Ni 42 in Abhängigkeit von der Temperatur für verschiedene Feldstärken

Diskussion der Messungen der Fe-Ni-Legierungen. Ein Vergleich der Meßergebnisse mit theoretischen Beziehungen wie bei Nickel ist unter den gegenwärtigen Voraussetzungen nicht ausführbar, da die Magnetostraktion von Eisen-Nickel-Legierungen in Abhängigkeit von der Temperatur noch nicht bekannt ist¹⁾. Andererseits war es unter diesen Versuchsbedingungen bei einem Dimensionsverhältnis $\frac{l}{d} = 50$ wegen des großen Entmagnetisierungsfaktors nicht möglich, bei diesen Legierungen Anfangssuszeptibilitäten genau zu bestimmen.

Durchführbar ist eine Abschätzung bei Zimmertemperatur unter Benutzung der Ergebnisse anderer Verff., wie es Nakamura versuchte. Dieses Verfahren ist jedoch außerordentlich unsicher, da für verschiedene Proben die innere Eigenspannungsgröße σ_i einen anderen Wert haben kann, wovon natürlich die Anfangssuszeptibilität x_0 abhängt. Eine Abschätzung vorliegender Ergebnisse im Sinne der Theorie nach Kersten ergibt daher auch nur eine größenordnungsmäßige Übereinstimmung ($\pm 30\%$ Abweichung).

Schwierigkeiten für die Auswertung magnetoelastischer Untersuchungen im System Fe-Ni entstehen dadurch, daß genaue Messungen der Magnetostraktion, des ΔE -Effektes und der Anfangssuszeptibilität in Abhängigkeit von der Temperatur vorliegen müssen. Die Bestimmung des ΔE -Effektes setzt eine obere Grenze des Dimensionsverhältnisses der Probe von etwa $\frac{l}{d} = 100$, weil sonst die

1) Messungen des Temperaturverlaufes der Magnetostraktion der Fe-Ni-Legierungen sind im hiesigen Institut im Gange und werden in Kürze in der Dissertation von H. Jay veröffentlicht werden.

experimentellen Verhältnisse zu ungünstig werden. Für die Messung der Anfangssuszeptibilität ist aber ein noch größeres Dimensionsverhältnis des Probestabes erforderlich, um den Entmagnetisierungsfaktor in kleinsten Grenzen zu halten. Diese zwei Proben gleicher Zusammensetzung, aber verschiedenen Dimensionsverhältnisses, müßten die gleiche thermische Vorgeschichte haben, um gleiche innere Spannungsgrößen aufzuweisen.

Untersuchungen an Kobalt

Eine Sonderstellung unter den Ferromagnetika nimmt Kobalt durch seine allotrope Umwandlung ein. Beide Kristallsysteme sind ferromagnetisch. Eine Untersuchung des ΔE -Effektes bei höheren

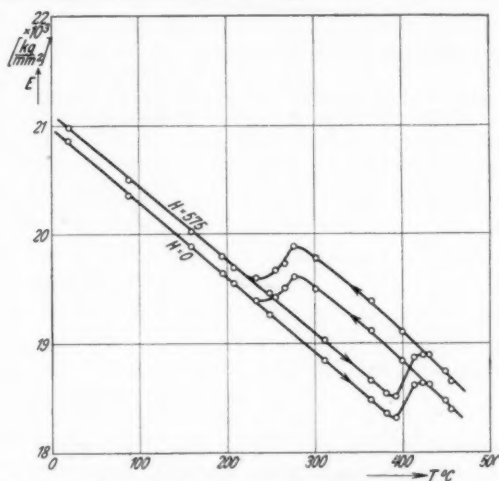


Abb. 19. Der EM. von Kobalt in Abhängigkeit von der Temperatur für $H = 0$ und $H = 575$ Oe

Temperaturen wurde bisher noch nicht durchgeführt. Außerdem war von Nakamura¹⁾ innerhalb seiner Meßgenauigkeit keine Abhängigkeit des EM. von der Magnetisierung bei Zimmertemperatur festgestellt worden.

Abb. 19 zeigt den Verlauf des EM. für $H = 0$ und $H = 575$ Oe in Abhängigkeit von der Temperatur. Die eingezeichneten Pfeile geben den Verlauf des EM. für zunehmende bzw. abnehmende Temperatur an. Die Kurvendarstellung ergibt, daß ein meßbarer ΔE -Effekt bei Kobalt sich durch das ganze Temperaturgebiet verfolgen läßt, und daß er nach der allotropen Umwandlung etwa

1) K. Nakamura, Sc. Rep. Tohoku Univ. 24. S. 303. 1935.

doppelt so groß ist. Eine Glühbehandlung hatte keine Vergrößerung des Effektes zur Folge.

Wie dem Verf. erst nach Abschluß seiner Arbeiten bekannt wurde, erschien gegen Ende 1936 von Nakamura¹⁾ eine Mitteilung über die Temperaturabhängigkeit des EM. von Kobalt, die einen entsprechenden Verlauf zeigt. Der Temperaturunterschied der beiden

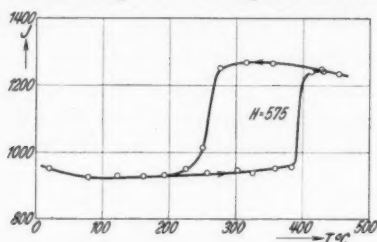


Abb. 20. Die Magnetisierungsintensität von Kobalt für $H = 575$ Oe in Abhängigkeit von der Temperatur

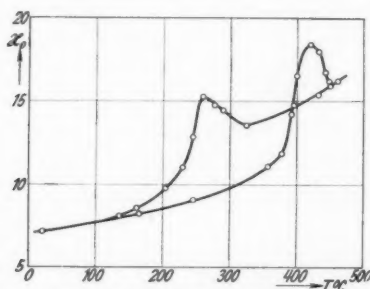


Abb. 21. Die Anfangssuszeptibilität χ_0 von Kobalt in Abhängigkeit von der Temperatur

Umwandlungspunkte an dieser Probe ist größer als bei Nakamura, was nach Untersuchungen von A. Schulze²⁾ von dem Reinheitsgrad der betreffenden Probe abhängen kann.

Außerdem wurde die Magnetisierungsintensität für $H = 575$ Oe (Abb. 20) und die Anfangssuszeptibilität (Abb. 21) in Abhängigkeit von der Temperatur bestimmt.

Zusammenfassung

Es wird eine Meßmethode beschrieben, welche gestattet, den EM. ferromagnetischer Stoffe in Abhängigkeit von der Temperatur

1) K. Nakamura, Prof. K. Honda Anniversary Volume 1. Ser. S. 146 bis 157. Oktober 1936.

2) A. Schulze, Ztschr. d. Ver. d. Ing. 76. S. 108. 1932.

und vom Magnetfeld zu bestimmen. Die Versuchsstäbe werden zu longitudinalen Schwingungen nach der Selbsterregungsmethode angeregt.

1. Für Nickel zeigt die Änderung des EM. bei etwa 125° C ein Maximum des ΔE -Effektes. Auf Grund der theoretischen Beziehungen nach Kersten wird eine Diskussion der Meßergebnisse durchgeführt, die für Nickel bei höheren Temperaturen bis auf einen konstanten Faktor gute Übereinstimmung mit den theoretischen Formeln ergibt. Mit den Ergebnissen von Nakamura besteht für Nickel bei Zimmertemperatur quantitative Übereinstimmung.

2. Der ΔE -Effekt für Eisen zeigt in dem untersuchten Temperaturgebiet keine Besonderheiten.

3. Es wurden vier Eisen-Nickel-Legierungen untersucht:

a) Für Fe-Ni 93 ist bei 125° C noch ein ausgeprägtes flaches Maximum des ΔE -Effektes vorhanden.

b) Fe-Ni 78,5 zeigt nur eine geringe Änderung des EM. im Magnetfeld. Bei Zimmertemperatur ergaben sich für den ΔE -Effekt in hartem Zustand etwa 0,4%, nach der Glühung etwa 1,4%.

c) An Fe-Ni 50 erreicht der ΔE -Effekt bei Zimmertemperatur seinen größten Wert von etwa 7,3%.

d) Bei Fe-Ni 42 ändert der Temperaturkoeffizient des EM. am CP. sein Vorzeichen.

4. Der Verlauf des EM. an Kobalt in Abhängigkeit von der Temperatur zeigt im Gebiet der allotropen Umwandlung eine Temperaturhysterese, die sich auch in der Magnetisierungsintensität und Anfangssuszeptibilität bemerkbar macht.

Diese Arbeit wurde im Technisch-Physikalischen Institut der Universität Jena ausgeführt. Meinem hochverehrten Lehrer, Herrn Staatsrat Prof. Dr. A. Esau, bin ich für sein förderndes Interesse an dieser Arbeit zu großem Dank verpflichtet. Herrn Dr. E. Ahrens, der die Anregung zu dieser Arbeit gab und die Ausführung derselben leitete, gilt mein besonderer Dank für viele wertvolle Ratschläge.

Jena, Technisch-Physikalisches Institut, im März 1937.

(Eingegangen 8. Oktober 1937)

V
3
1
1
9
3
8
XUM

**Die Anregung von Gasen
bei sehr geringen Gasdrucken durch Elektronenstoß¹⁾**

Von W. v. Meyeren

(Mit 7 Abbildungen)

1. Einleitung

In zwei früheren Arbeiten untersuchte der Verf. die elektrische Aufzehrung von Gasen bei sehr geringen Drucken in einer Glühkathodenröhre²⁾. Die rein elektrische Aufzehrung ist um so stärker, je mehr das Gas ionisiert ist. Bei sehr niederen Drucken ist die Ionisierung durch Elektronenstoß aber gering. Mit abnehmendem Druck wird die mittlere freie Weglänge der Elektronen immer größer; die Stoßwahrscheinlichkeit nimmt ab. Deshalb wurden bei den Aufzehrungsversuchen die Elektronen durch das Feld zwischen einer ringförmigen Anode und einer Glühkathode beschleunigt (Abb. 1) und gleichzeitig durch ein magnetisches Längsfeld in der Rohrachse gebündelt. Hierdurch wurde erreicht, daß ein großer Teil der Elektronen nicht zur Anode gelangte, sondern sich auf Spiralbahnen durch die Anode hindurch bewegte. Auf diese Weise wurden die Elektronen gezwungen, lange Wege zu durchlaufen. Damit erhöhte sich auch die Wahrscheinlichkeit für unelastische Zusammenstöße mit den Gasatomen. Die Vergrößerung der Stoßwahrscheinlichkeit und die damit verbundene Erhöhung der Ionisierung äußerten sich darin, daß selbst bei Gasdrucken unter $1 \cdot 10^{-4}$ Tor ein kräftiges Gasleuchten wahrzunehmen war.

Das Spektrum einer Gasentladung bei derartig geringen Gasdrucken müßte nun charakteristische Unterschiede gegenüber den Spektren der Entladungen bei höheren Drucken aufweisen. In den zur Untersuchung der Gasspektren gebräuchlichen Lichtquellen ist der Gasdruck oft recht hoch. Im Geisslerrohr z. B. beträgt er mitunter mehrere Tor. Bei diesen Drucken ist zu erwarten, daß die zur Beobachtung gelangende Strahlung von der wirklichen Strahlung der Atome (Ionen) abweicht, da letztere durch sekundäre Effekte, wie z. B. Selbstabsorption, oder Stöße 2. Art modifiziert

1) Teil der Habilitationsschrift der Techn. Hochschule Hannover.

2) W. v. Meyeren, Ztschr. f. Phys. **84**. S. 531. 1933; **91**. S. 727. 1934.

wird. Bei sehr geringen Gasdrucken sind solche die Strahlung verfälschende Effekte nicht zu erwarten.

Die vorliegende Arbeit bringt zunächst die Beschreibung einer Versuchsanordnung zur Erzeugung intensiver Gasspektren bei niederen Drucken. Ferner werden einige allgemeinere Eigenschaften einer solchen Entladung besprochen. In einer späteren Abhandlung soll das Spektrum des einfach ionisierten Argons bei sehr niederem Druck genauer untersucht werden, wobei besonders die Unterschiede gegenüber den bei höheren Gasdrucken erhaltenen Spektren darzulegen sind.

2. Versuchsanordnung

Die in den früheren Arbeiten verwendete Glühkathodenröhre wurde für die spektroskopischen Untersuchungen zweckmäßig weiterentwickelt, wobei die Möglichkeit schneller Reinigung und die des Auswechselns der Glühkathode besonders berücksichtigt wurde. Als beste Lösung erwies sich folgende Konstruktion (Abb. 1): In ein zylindrisches Rohr R war die aus 0,5 mm starkem Platindraht bestehende Ringanode A so eingeschmolzen, daß die Fläche des Anodenringes senkrecht zur Rohrachse stand. Als Glühkathode GK diente eine kurze Spirale aus Wolframdraht von 0,1 mm Stärke. Sie wurde von einem Wehneltzylinder WZ aus dünnem, vakuumgeschmolzenen Nickelblech umgeben. Mit Hilfe des am linken Ende des Rohres R befindlichen Schliffes S_1 konnte die Kathode schnell ausgewechselt werden. Das andere Ende von R trug den Schliffmantel S_2 . Er wurde durch einen Schliffkonus verschlossen, in welchen ein Quarzrohr mit Planplatte Q eingeschmolzen war. Ein seitlich an R angeblasenes Glasrohr führte in die Ausfrier tasche AT . Diese konnte mittels des Schliffes S_3 leicht auseinander genommen werden. Der Schliff S_1 wurde vorsichtig mit einer Spur Apiezonfett so gedichtet, daß kein Fett zwischen den Schliffflächen hindurch in das Innere des Entladungsrohres gedrückt wurde. Der Schliff S_2 wurde mit einem schmalen Ring weißen Kittlackes nur an der Stelle seines größten Umfanges gedichtet, so daß der größte Teil der Schliffflächen frei von jedem Dichtungsmittel war. Diese Schliffdichtungen gaben keine nachweisbaren Verunreinigungen in das Entladungsrohr ab. Der Schliff S_3 wurde ebenfalls mit Apiezonfett zusammengesetzt. Hierbei brauchte nicht die gleiche Vorsicht zu walten, da etwaige Fettdämpfe durch die Ausfrier tasche zurückgehalten wurden.

Über das Entladungsrohr R konnten zwei gleiche Magnet spulen $Sp_{1,2}$ geschoben werden. Durch eine Führungsschiene, Stell-

schrauben und Anschläge konnten die Spulen in jede gewünschte, stets reproduzierbare Lage zu den Elektroden gebracht werden.

Die Ausfrierflasche *AT* war an die Vakuumapparatur angeblasen. Zum Evakuieren diente eine zweistufige Diffusionspumpe aus Glas. Die Druckmessung geschah stets mit einem Ionisationsmanometer, das häufig durch Vergleich mit einem großen McLeod kontrolliert wurde. Während der Entladung zerstäubte langsam etwas Nickel vom Wehneltzylinder *WZ*, so daß sich allmählich auf der Innenwand des Glasrohres *R* in der Umgebung der Kathode ein dünner Nickelspiegel niederschlug. Gleichzeitig erfolgte eine merkliche

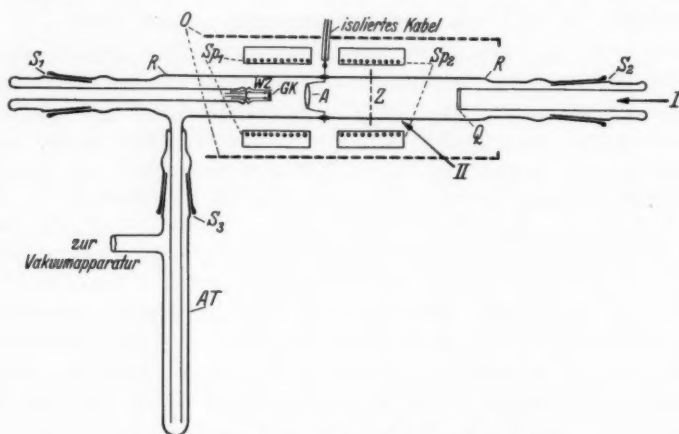


Abb. 1. Konstruktion der Glühkathodenröhre

Gasaufzehrung. Da es sich im Verlauf der Untersuchung als notwendig erwies, den Gasdruck im Entladungsrohr möglichst konstant zu halten, wurde aus dem Gasvorrat ständig so viel Gas in die Vakuumapparatur eingelassen, wie durch die Entladung aufgezehrt wurde. Dies geschah mittels eines einfachen Nadelventiles¹⁾, das einen bequem zu regulierenden Gasstrom aus dem Vorrat in das Vakuum eintreten ließ. Damit konnte im Entladungsrohr ein Druck von $1 \cdot 10^{-4}$ Tor während mehrerer Stunden bis auf $\pm 2\%$ konstant gehalten werden.

Außer der Ausfrierflasche *AT* enthielt die Apparatur noch zwei weitere. Quecksilberdämpfe und andere Verunreinigungen wurden durch diese dreifache Kühlung mit flüssigem Sauerstoff vollständig vom Entladungsrohr ferngehalten.

1) W. v. Meyeren, Ztschr. techn. Phys. 18. S. 281. 1937.

Vor Beginn eines jeden Versuchs wurde das Entladungsrohr stets sehr sorgfältig ausgeheizt und entgast, bis der Gasdruck unmeßbar klein, d. h. geringer als $1 \cdot 10^{-6}$ Tor geworden war. Nach dem Ausheizprozeß, der sich über mehrere Stunden erstreckte, wurden die Magnetspulen über die Glühkathodenröhre geschoben, bis sie die in Abb. 1 angegebene Lage hatten. Die Ringanode *A* wurde durch ein isoliertes Kabel, das zwischen den beiden Magnetspulen hindurchführte, mit dem positiven Pol der Spannungsquelle — Hochspannungsgenerator mit Potentiometer zur Spannungsregelung — verbunden. Der negative Pol und die Mitte der Glühkathode lagen an Erde. Der Wehneltzylinder *WZ* erhielt eine Spannung von + 10 Volt gegen Erde.

Die Spannung zwischen Anode und Kathode betrug stets 1800 Volt. Ebenso wurde immer das gleiche Magnetfeld benutzt. Es war natürlich keineswegs homogen. Dies ist jedoch für den Entladungsvorgang im Glühkathodenrohr unwesentlich. Die Feldstärke am Ort der Ringanode¹⁾ betrug immer 300 Oe. Die Heizung der Glühkathode wurde ständig kontrolliert, damit der Elektronenstrom zwischen Kathode und Anode bei allen Gasdrucken 4 bis 5 mA nicht überschritt. Über 6 mA durfte die Stromstärke nicht betragen. Das Entladungsrohr wurde sonst überlastet und zersprang nach kurzer Zeit an den Einschmelzstellen der Anode.

Die optische Einrichtung bestand aus einem Dreiprismen-Glasspektrographen von Steinheil-München ($f = 1 : 3$) und einem kleinen Quarzspektrographen mit Cornuprisma von Fuess-Steglitz. Mit letzterem wurde „end on“ beobachtet (Abb. 1, Pfeilrichtung I). Dabei wurde die Kollimatorachse des Spektrographen an der Kathode vorbei visiert, damit nicht das direkte Licht des Glühdrahtes in den Apparat gelangte. Mit einer Quarzlinse von 200 mm Brennweite wurde die Zone *Z* des Entladungsraumes (Abb. 1, etwa die Mitte der Spule *Sp*₂) in natürlicher Größe auf den Spalt abgebildet.

Um das gesamte Spektralgebiet von 2200 bis 4000 Å hinreichend scharf auf die Platte zu bekommen, war der Spektrograph auf 1 : 25 abgeblendet. Trotz dieser geringen Lichtstärke waren die bei end on-Beobachtung erhaltenen Spektrogramme stets gut durchbelichtet; die intensiven Linien waren sogar stets überstrahlt.

Der Glasspektrograph war schräg gegen die Achse des Entladungsrohres *R* gerichtet (Abb. 1, Pfeilrichtung II). Es wurde durch die Glaswand hindurch die gleiche Zone *Z* etwas verkleinert auf den Spalt abgebildet. Mit Rücksicht auf die geringe Intensität

1) Hierauf beziehen sich alle im folgenden gemachte Feldstärkeangaben.

der Entladung im sichtbaren Spektralgebiet und auf die geringe Tiefe der leuchtenden Gasschicht bei dieser Beobachtungsrichtung wurde die volle Öffnung 1 : 3 des Spektrographen ausgenutzt. Man erhielt dann zwar nur das Gebiet von 4000—4900 Å völlig scharf, doch genügte dies für die vorliegenden Untersuchungen.

Die Spaltweite betrug bei beiden Spektrographen immer 0,015 mm. Für die Aufnahmen im Ultravioletten wurden gewöhnliche Extrarapidplatten von Schleussner ohne Lichthofschutz benutzt. Sie erwiesen sich für das ganze Spektralgebiet von 2200—4000 Å als sehr empfindlich. Das Korn war sehr fein. Für die Aufnahmen im Sichtbaren wurden Agfa-Isoschroplatten benutzt. Entwickelt wurde 6 Min. lang mit Agfa-Rodinallösung 1 : 25 bei 18° C.

Als Vergleichsspektrum diente das Spektrum eines Eisenbogens nach Pfund. Da die Belichtungszeiten bei der Entladung in Argon in einigen Fällen über 10 Std. betrugen, wurde zu Beginn einer solchen Aufnahme ein Eisenspektrum auf die Platte gedruckt und nach Beendigung der Aufnahme ein zweites Eisenspektrum unmittelbar unter das erste. Eine Temperaturänderung des Arbeitsraumes während der Aufnahme machte sich dann, wenn sie mehr als 0,5° C betrug, in einer deutlichen Linienverschiebung beider Eisenspektren gegeneinander bemerkbar. In solchen Fällen wurde die Aufnahme wiederholt. Doch gelang es fast immer, durch Zusatzheizung die Temperatur des Arbeitsraumes so konstant zu halten, daß die Aufnahmen einwandfrei waren. Die Ausmessung der Spektren für die Bestimmung der Wellenlängen geschah mit einem Zeisskomparator.

3. Die Kennlinien der Glühkathodenröhre

Die konzentrierende Wirkung des magnetischen Längsfeldes auf die Entladung zeigt die Stromspannungs-Charakteristik der Glühkathodenröhre (Abb. 2). Der Heizstrom für den Glühdraht betrug 0,48 Amp., der Gasdruck $4 \cdot 10^{-6}$ Tor. Abb. 2a gibt die Kennlinie bei einer magnetischen Feldstärke von 300 Oe, Abb. 2b die ohne Magnetfeld. Es wurde stets bei steigender und abnehmender Spannung gemessen. Der verschiedenartige Verlauf beider Messungen (Abb. 2b) beruht auf einem bei Gasentladungen häufig zu beachtenden Ionisierungseffekt. Bei steigender Spannung ist bei 1540 Volt die Anzahl der pro Zeiteinheit gebildeten Ionen ausreichend, um die Elektronenraumladung vor der Kathode zu neutralisieren. Der Strom zwischen Kathode und Anode springt dann un stetig auf den dreifachen Wert. Damit wächst auch die Anzahl der pro Sekunde durch Elektronenstoß gebildeten positiven Ionen stark an. Die Ionisierung des ganzen Entladungsraumes reicht jetzt aus, um auch

bei wieder abnehmender Spannung die plötzliche Ausbildung der Elektronenraumladung zu verhindern. Diese Raumladung bildet sich vielmehr, wie der Verlauf der Kennlinie (Abb. 2b) zeigt, allmählich aus.

In Abb. 2a ist der Verlauf der Kennlinie bei einem Magnetfeld von 300 Oe wiedergegeben. Jetzt wird der größte Teil der Elektronen durch das Magnetfeld daran gehindert, die Anode zu

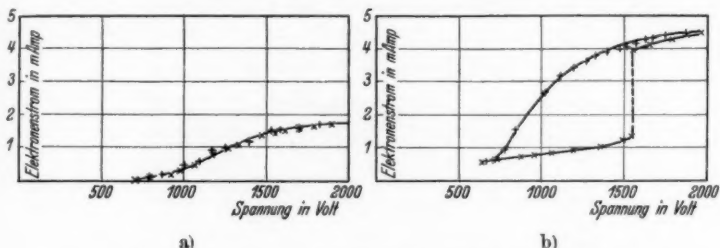


Abb. 2. Stromspannungscharakteristik der Glühkathodenröhre. Gasdruck (Argon): $4 \cdot 10^{-6}$ Tor; a) mit Magnetfeld (300 Oe), b) ohne Magnetfeld

erreichen, und ist gezwungen, sich durch den Anodenring hindurch zu bewegen. Es wird sich jetzt im Gebiet der Rohrachse eine sehr hohe Elektronendichte einstellen und damit eine Vergrößerung der negativen Raumladung im Entladungsrohr. Jetzt reicht die Zahl der pro Sekunde durch Stoß gebildeten Ionen in dem benutzten Spannungsbereich zwischen 0 und 2000 Volt noch nicht aus, um die Elektronenraumladung zu beseitigen. Deshalb beträgt die höchste erreichbare Stromstärke nur 1,6 mA.

Erst bei weiterer Drucksteigerung wird die Zahl der pro Sekunde gebildeten Ionen ausreichend, um die Raumladung zu beseitigen und damit den Elektronenstrom zu vergrößern.

In Abb. 3 ist die Abhängigkeit des Elektronenstromes vom Gasdruck dargestellt. Der Kathodenheizstrom betrug wieder 0,48 Amp., die Spannung zwischen Kathode und Anode 1800 Volt, die magnetische Feldstärke 300 Oe. Auch hier wurde bei steigendem und abnehmendem Gasdruck (Argon) gemessen. Bei steigendem Druck ändert sich zunächst die Stromstärke nur unwesentlich. Bei einem Druck von $1,0 \cdot 10^{-4}$ Tor wird die Entladung instabil, die Stromstärke schwankt stark. Bei $1,1 \cdot 10^{-4}$ Tor ist die Entladung stabil geworden, die Stromstärke ist ungefähr auf den zweifachen Wert angestiegen und nimmt nun mit weiter steigendem Druck sehr stark zu. Dieser letzte Teil der Kennlinie konnte nicht gemessen werden, da das Entladungsrohr Ströme über 6 mA nur kurze Zeit aushielt.

Der Verlauf der Kennlinie ist für dieses Gebiet daher nur strichpunktiert angedeutet.

Dieser Umschlag der Entladung ist auch visuell gut zu beobachten. Bei Drucken unterhalb $1,0 \cdot 10^{-4}$ Tor leuchtet das Rohr

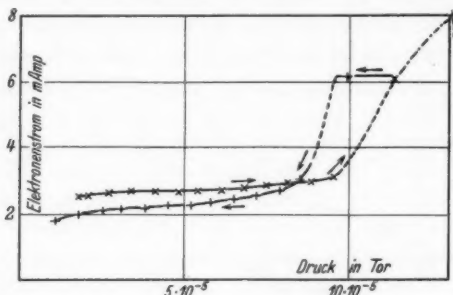


Abb. 3. Abhängigkeit des Elektronenstromes vom Gasdruck (Argon).
Spannung zwischen Anode und Kathode: 1800 Volt; Magnetfeld: 300 Oe

in gleichmäßigem blauen Licht. Oberhalb von $1,1 \cdot 10^{-4}$ Tor erscheint in der Rohrachse ein intensives, blau-violettes Leuchten, das sich bei weiterer Drucksteigerung immer mehr auf einen kleineren Durchmesser zusammenzieht. Nimmt nun der Druck — vom höchsten Meßpunkt ausgehend — wieder ab, so bleibt der Elektronenstrom zunächst nahezu konstant. Bei $9,6 \cdot 10^{-5}$ Tor wird die Entladung wieder instabil, bis ein Druck von $8,7 \cdot 10^{-5}$ Tor erreicht ist. Die Stromstärke ist jetzt wieder auf die Hälfte gesunken und ändert sich bei weiterer Druckabnahme nur wenig. Die erste Entladungsform hat sich wieder eingestellt.

Die eingehende Diskussion dieser Druckcharakteristik wird am Ende des nächsten Abschnittes vorgenommen.

4. Die Druckabhängigkeit der Entladung in Argon

Abb. 4 zeigt das Spektrum der Entladung in Argon bei vier verschiedenen Drucken: a) $2,80 \cdot 10^{-4}$ Tor, b) $1,75 \cdot 10^{-4}$ Tor, c) $1,1 \cdot 10^{-4}$ Tor, d) $8,2 \cdot 10^{-5}$ Tor, und zwar im Gebiet von 4000 bis 4900 Å. Die Spannung zwischen Kathode und Anode betrug 1800 Volt, die magnetische Feldstärke 300 Oe. Der Elektronenstrom wurde durch entsprechend gewählte Kathodenheizung für alle Gasdrucke gleich groß gehalten. Er betrug stets 4,0–4,5 mA. Die Belichtungszeiten waren sehr verschieden. Sie betrugen für Aufnahme a) und b) je 1 Std., für c) 2 Std. und für d) 5 Std. Das

Entladungsrohr war verkleinert auf den Spektrographenspalt abgebildet (vgl. Abschn. 1), so daß die gesamte Breite des Spektrums dem Durchmesser der Glühkathodenröhre entsprach. In jede Aufnahme wurde schließlich noch ein Eisen-Vergleichsspektrum eingefügt. (Bei den in diesem Falle nicht übermäßig langen Belichtungszeiten waren Temperaturänderungen des Arbeitsraumes und

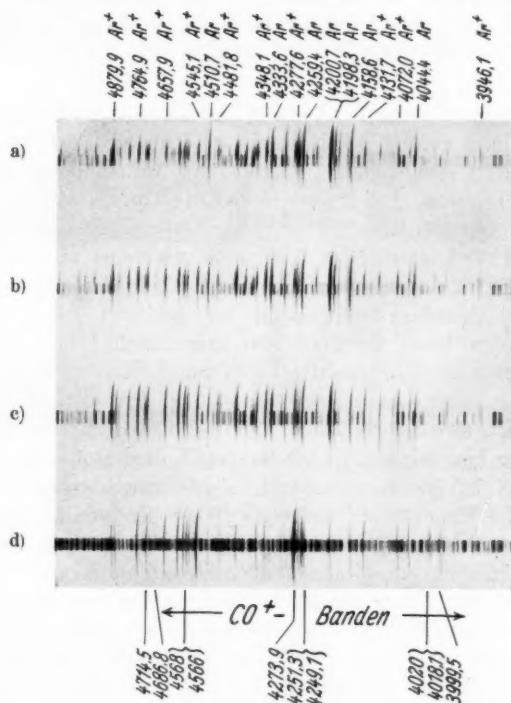


Abb. 4. Das Spektrum der Entladung in Argon bei verschiedenen Drücken (sichtbares Gebiet).

a) $2,80 \cdot 10^{-4}$ Tor, b) $1,75 \cdot 10^{-4}$ Tor, c) $1,1 \cdot 10^{-4}$ Tor, d) $8,2 \cdot 10^{-5}$ Tor.

Spannung zwischen Anode und Kathode: 1800 Volt; Magnetfeld: 300 Oe

damit verbundene Linienunschärfe nicht zu befürchten. Es wurde deshalb nur am Schluß jeder Aufnahme ein Vergleichsspektrum gedruckt.)

Bemerkenswert ist die starke Änderung der Linienform bei abnehmendem Druck. Bei $2,8 \cdot 10^{-4}$ Tor besteht das Spektrum — neben einigen langen Linien, die sich über die ganze Breite des

Spektrums erstrecken — aus sehr kurzen Linien. Die Analyse des Spektrums ergab, daß die langen Linien sämtlich Bogenlinien des Argons sind, während die kurzen Linien dem ersten Funkenspektrum (Ar^+) angehören. Bei $1,75 \cdot 10^{-4}$ Tor (Aufnahme b) werden die Funkenlinien länger und erstrecken sich bei $1,1 \cdot 10^{-4}$ Tor (Aufnahme c) wie die Bogenlinien fast über die ganze Breite des Spektrums. Sehr deutlich zeigen dies z. B. die Linien 4879,9, 4764,9, 4657,9, 4545,1 (sämtlich Ar^+) und 4510,7 (Ar), ferner 4348,1 (Ar^+) und 4333,6 (Ar), 4277,6 (Ar^+) und 4259,4 (Ar), ferner 4158,6 (Ar) und 4131,7 (Ar^+).

Bei Drucken unterhalb $1,1 \cdot 10^{-4}$ Tor schlägt die Entladung — wie in Abschn. 2 gezeigt wurde — in eine andere Form um. Das Spektrum ändert sich zugleich vollständig. Aufnahme 4d zeigt das Spektrum bei einem Druck von $8,2 \cdot 10^{-5}$ Tor. Es wird weiter unten besprochen werden.

Die Druckveränderung des Spektrums zusammen mit der Druckcharakteristik (Abb. 3) erlauben es, den Entladungsmechanismus in der Glühkathodenröhre weitgehend zu erklären. Bei höheren Drucken werden längs der Spur des magnetisch gebündelten Kathodenstrahles zahlreiche positive Ionen durch Stoß gebildet. Diese bleiben infolge ihrer sehr geringen Beweglichkeit praktisch an ihrem Entstehungsort, also im zentralen Teil des Entladungsrohres, während die sehr beweglichen Elektronen nach dem Stoß auch seitlich abgelenkt und infolge ihrer wesentlich größeren als gaskinetischen Energie in die Randgebiete des eigentlichen Entladungsraumes gelangen können. Es wird sich im Gebiet der Rohrachse eine positive Überschußladung ausbilden und damit ein radiales elektrisches Feld. Der Elektronenstrahl, der an sich infolge der gegenseitigen Abstoßung seiner Elektronen das Bestreben hat, allmählich auseinander zu laufen und mit wachsender Entfernung von der Anode seinen Querschnitt zu vergrößern, wird jetzt durch das radiale Feld zusammengehalten. Nimmt nun der Gasdruck ab, so verringert sich die pro Sekunde durch Stoß gebildete Zahl der positiven Ionen. Damit wird auch das radiale Feld schwächer, der Elektronenstrahl kann sich ausbreiten. Damit vergrößert sich der Querschnitt des Raumes, in welchem Stoßionisation stattfindet und in welchem die positiven Ionen sich aufhalten. Hiermit ist das Längerwerden der Funkenlinien bei abnehmendem Druck erklärt.

Bei einem Druck von $1,0 \cdot 10^{-4}$ Tor ist die Zahl der pro Sekunde gebildeten Ionen so klein geworden, daß sich plötzlich eine Elektronenraumladung vor der Kathode ausbilden kann. In der Druckcharakteristik (Abb. 3) äußert sich dieser Vorgang darin, daß

die Entladung instabil wird und der Elektronenstrom unstetig absinkt.

Nach Entstehung der Raumladung kann sich ein eng begrenzter Kathodenstrahl nicht mehr ausbilden. Die Rolle der kleinen Wolframspirale als Elektronenquelle und Kathode hat jetzt die ausgedehnte Raumladungswolke vor der Kathode übernommen. Die Elektronen können sich jetzt über den ganzen Rohrquerschnitt verteilen und auch die Glaswände erreichen. Im Spektrum der Entladung macht sich dies in sehr charakteristischer Weise be-

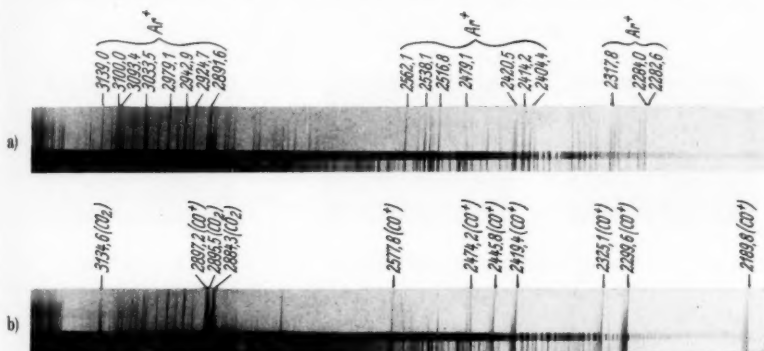


Abb. 5. Das Spektrum der Entladung in Argon bei verschiedenen Drucken (kurzwelliges UV). a) $1,18 \cdot 10^{-4}$ Tor, b) $8,5 \cdot 10^{-5}$ Tor.

Spannung zwischen Anode und Kathode: 1800 Volt; Magnetfeld: 300 Oe

merkbar. In der Aufnahme Abb. 4d ist das Argonspektrum nur schwach vorhanden. Dafür ist eine große Zahl von Banden neu aufgetreten. Abb. 5 zeigt die gleiche Änderung des Spektrums im ultravioletten Gebiet von 2200—3200 Å. Bei der Aufnahme 5a betrug der Gasdruck $1,18 \cdot 10^{-4}$ Tor, bei 5b dagegen $8,5 \cdot 10^{-5}$ Tor. Die Spannung zwischen Kathode und Anode betrug wieder 1800 Volt, das Magnetfeld 300 Oe, der Elektronenstrom 4,5 mA. Die Aufnahme 5a wurde 4 Std. belichtet, Aufnahme 5b 11 Std. Jede Aufnahme enthält zwei Eisenvergleichsspektren, die untereinander gedruckt wurden (vgl. Abschn. 2). Während 5a nur das Bogen- und Funkenspektrum des Argons völlig frei von jeder Verunreinigung zeigt, treten in 5b zahlreiche, zum Teil sehr intensive Banden auf. Es sind CO^+ - und CO_2 -Banden. Von den ersteren wurden beobachtet die Banden der ersten negativen Gruppe, die dem Elektronenübergang $2\Sigma^+ - 2\Sigma$ entsprechen, und die des Kometenschweif-spektrums (Elektronenübergang $3\Pi - 2\Sigma$).

In Abb. 6 sind die Banden bei 2299,6 und 2325,1 Å der ersten negativen Gruppe, in Abb. 7 die Doppelbande bei 4249,1 und 4273,9 des Kometenschweifspektrums in 15facher Vergrößerung wiedergegeben.

In Entladungsröhren mit Glühkathoden ist häufig das Auftreten von CO^+ -Banden beobachtet worden¹⁾. Man hat sie immer Verunreinigungen der im Entladungsrohr untersuchten Gase zugeschrieben. Für die Herkunft der mit dem oben beschriebenen Entladungsrohr erhaltenen Banden trifft diese Erklärung jedoch

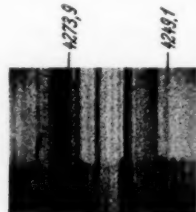
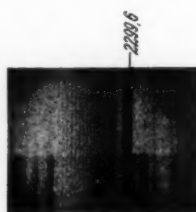
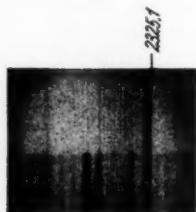


Abb. 6. CO^+ -Banden bei 2299,6 und 2325,1 Å
(1. negative Gruppe)

Abb. 7. CO^+ -Bande
bei 4249,1 u. 4273,9 Å
(Kometenschweif-
spektrum)

sicher nicht das Richtige. Denn es wäre völlig unverständlich, warum die Banden nur bei Drucken unter $1 \cdot 10^{-4}$ Tor auftreten. Für die Herkunft der Banden ist vielmehr die Glaswand des Entladungsrohres verantwortlich zu machen. Wie bereits oben dargelegt ist, können die Elektronen nach Ausbildung der Raumladung vor der Kathode auch die Glaswände erreichen. Beim Auftreffen auf die Wände wird dann die kinetische Energie der Elektronen in Wärmeenergie umgesetzt und es kann durch die lokale Erhitzung an der Auftreffstelle adsorbiertes bzw. okkludiertes Kohlendioxyd und Kohlenoxyd frei gemacht werden. Diese Erklärung wird durch die Untersuchungen von Langmuir²⁾ und von Sherwood und Shrader³⁾ gestützt. Sie fanden, daß Gläser beim Erhitzen im guten Vakuum ständig Kohlendioxyd und Kohlenoxyd abgeben und schließen daraus, daß diese Gase in beträchtlichen Mengen adsor-

1) L. H. Dawson u. J. Kaplan, Phys. Rev. [2] 34. S. 379. 1929; L. R. Maxwell, ebenda [2] 35. S. 665. 1930.

2) I. Langmuir, J. Am. Chem. Soc. 38. S. 2283. 1916; 40. S. 1387. 1918.

3) Sherwood u. Shrader, ebenda 40. S. 1645. 1918; Phys. Rev. 12. S. 448. 1918; 13. S. 434. 1919.

biert sind. Die Herkunft der Oxyde aus der Glaswand wird ferner dadurch bewiesen, daß gleichzeitig mit dem Erscheinen der Banden auch stets Siliciumlinien auftraten. So konnten z. B. die Siliciumlinien bei 2514,3, 2516,2, 2519,2, 2524,1 Å festgestellt werden.

Die Möglichkeit, daß der mit Apiezonfett gedichtete Schliif der Glühkathode Kohlenoxyde in das Entladungsrohr abgab, muß verneint werden. Bei den ersten Versuchen wurde ein Glühkathodenrohr benutzt, welches überhaupt keine Schriffe und Fettdichtungen hatte, und bei welchem die Zuführungen zu den Elektroden durch die Ausfriertasche des Entladungsrohres geleitet waren. Auch die mit diesem Rohr, das wegen seiner komplizierten Handhabung und kurzen Lebensdauer aufgegeben wurde, erhaltenen Spektren zeigten bei Drucken unter $1 \cdot 10^{-4}$ Tor stets die CO^+ - und CO_2 -Banden.

In den folgenden Tabellen 1 und 2 sind die beobachteten Banden aufgeführt. Es sind die Wellenlängen der Bandenkanten mitgeteilt, ferner für die CO^+ -Banden die Numerierung der oberen und unteren Schwingungsquantenzahlen v' und v'' .

Tabelle 1

Beobachtete CO^+ -Banden

Elektronenübergang: $^2\Sigma \rightarrow ^2\Sigma^*$			Elektronenübergang: $^2\Pi \rightarrow ^2\Sigma$					
λ (Å)	v'	v''	λ (Å)	v'	v''	λ (Å)	v'	v''
2189,8	0	0	3169,1	14	2	3779,5	7	0
2296,9	4	4	3181,3			3797,4		
2299,6	0	1	3210,7	12	1	3999,5	6	0
2325,1	1	2	3414,6	9	0	4019,8		
2352,5	2	3	3429,2			4249,1	5	0
2419,4	0	2	3527,0	10	1	4273,9		
2445,8	1	3	3585,7	8	0	4542,6	4	0
2474,2	2	4	3602,3			4568,7		
2550,4	0	3	3689,8	9	1	4686,8	5	1
2577,8	1	4	3707,1			4714,5		
2607,2	2	5						
2897,2	6	10						

Tabelle 2

Beobachtete CO_2 -Banden

2874,3	3139,2	3170,1	3254,6	3377,5
2884,3	3142,4	3246,9	3264,6	3388,9
2895,5	3149,5	3249,4	3284,3	3394,5
3134,6	3155,2	3253,9	3370,0	3674,1
				3679,6

Zusammenfassung

Es wird eine Versuchsanordnung beschrieben, die es gestattet, intensive Gasspektren bei sehr geringen Drucken zu erzeugen. Die Anregung erfolgt durch schnelle Elektronen, die durch ein magnetisches Längsfeld in der Achse des Entladungsrohres gebündelt werden. Hierdurch wird eine hohe Stromdichte erreicht. Gleichzeitig werden die Elektronen gezwungen, auf Spiralbahnen lange Wege zu durchlaufen, so daß selbst bei einem Druck von $1 \cdot 10^{-4}$ Tor noch kräftige Ionisierung und Anregung stattfinden.

Aus dem Verlauf der Kennlinien des Entladungsrohres und aus der Abhängigkeit der Entladungsform vom Gasdruck wird der Entladungsmechanismus weitgehend geklärt. Bei Verminderung des Gasdruckes tritt unterhalb von $1 \cdot 10^{-4}$ Tor ein Raumladungseffekt auf, welcher das Spektrum der Entladung in bemerkenswerter Weise verändert. Es erscheinen intensive CO^+ - und CO_2 -Banden. Es wird gezeigt, daß nach Ausbildung einer Elektronenraumladung die Elektronen die Glaswände des Entladungsrohres erreichen können und dort die Molekulgase CO und CO_2 durch Stoß frei machen.

Zum Schluß danke ich Herrn Prof. H. Bartels für sein ständiges Interesse an der vorliegenden Arbeit. Der Helmholtz-Gesellschaft bin ich für die Überlassung eines Hochspannungselektrometers zu großem Dank verpflichtet. Das Argon wurde mir von der Gesellschaft für Lindes Eismaschinen freundlichst überlassen.

Hannover, Physikalisches Institut der Techn. Hochschule.

(Eingegangen 19. Oktober 1937)

**Bemerkungen zu der Abhandlung
von G. Simpson und F. J. Scrase:**

„Die Verteilung der Elektrizität in Gewitterwolken“¹⁾

Von B. Walter

In dieser kürzlich erschienenen Abhandlung teilen die Verfasser zunächst eine zahlreiche Reihe von Versuchen mit, bei denen sie einen für die Bestimmung des Vorzeichens des elektrischen Potentialgefälles in einer Gewitterwolke geeigneten, sehr sinnreich erdachten Apparat mit Hilfe eines Ballons in die Wolke hineinschickten und aus der so ermittelten Richtung und Größe jenes Gefälles auf den Sitz, das Vorzeichen und die Größe der elektrischen Ladungen an den verschiedenen Stellen der Wolke schlossen.

Sie fanden dabei, daß in den oberen Schichten einer solchen Wolke fast stets positive Ladungen enthalten waren, daß aber der dadurch bewirkte positive Gradient sich in keinem Falle bis zum Erdboden hin erstreckte. Vielmehr war der Gradient bei zahlreichen Aufstiegen auf dem ganzen Wege vom Boden bis zu dem oberen positiven Feld hin negativ, woraus sie schließen, daß dann in dem oberen Teil einer solchen Wolke eine positive und in ihrem unteren Teil eine negative Ladung saß. Es gab aber auch Fälle, in denen das Feld am Boden positiv war und erst in den unteren Teilen der Wolke negativ wurde, um weiter oben wieder positiv zu werden. In solchem Falle nehmen sie an, daß sich sowohl in den unteren wie in den oberen Teilen der Wolke eine positive und irgendwo dazwischen eine negative Ladung befand.

Im Anschluß an diese Feststellungen sagen sie dann, daß es von beträchtlichem Interesse sei, die Höhen, in denen die hauptsächlichsten Wechsel des Gradienten stattfinden, mit denjenigen Höhen zu vergleichen, in welchen die Temperatur in der Wolke unterhalb des Gefrierpunktes ist; und sie geben dann auch eine Zeichnung, in welcher für jeden der hierbei in Betracht kommenden 22 Aufstiege außer der Lage des aus der Lage der genannten Umkehr-

1) Sir George Simpson u. F. J. Scrase, Proc. Roy. Soc. London, A. 161. S. 309—352. 1937.

punkte geschlossenen Sitzes der hauptsächlichsten Ladungen in der Wolke zugleich auch die Lage des Gefrierpunktes sowie auch die des -10°C -Punktes in der Wolke angegeben ist.

Die betreffenden Temperaturstellen wurden jedoch nicht aus Beobachtungen ermittelt — die Temperatur wurde nämlich bei den Aufstiegen nicht registriert — sondern sie wurden aus der Temperatur der Luft am Boden in der Weise berechnet, daß man für den Abfall bis zum Wolkengrund hin das Mittel zwischen dem nassen und dem trocknen adiabatischen Abfall und für den Abfall innerhalb der Wolke den nassen adiabatischen Abfall annahm.

Sie fanden auf diese Weise, daß die Nulltemperatur in der Wolke bei ihren genannten 22 Aufstiegen in Höhen zwischen 0,8 und 3,8 km und die -10°C -Temperatur in Höhen zwischen 2,2 und 5,5 km lag.

Hierzu habe ich nun zu bemerken, daß nach meiner Ansicht und, wie ich gleich zeigen werde, auch nach der mehrerer angesehenen Meteorologen *die Temperatur in einer richtigen Gewitterwolke überall über dem Gefrierpunkt des Wassers liegt*; und weiter unten glaube ich übrigens auch eine sehr einfache physikalische Begründung dieser Ansicht geben zu können. Was aber zunächst diejenige maßgebender Meteorologen in dieser Hinsicht anbetrifft, so will ich hier aus Hanns Lehrbuch der Meteorologie nur einige Sätze von Clement Ley, den Hann a. a. O. (2. Aufl., S. 490) den größten Wolkenkenner nennt, hersetzen. Ley schreibt darnach u. a.: „Einige (englische) Meilen vom Beobachter beginnt am sommerlichen Himmel sich ein massiger Kumulus zu bilden. Da in der Atmosphäre bis zu großen Höhen fast Stille herrscht, behält der Kumulus seine halbkugelförmige Gestalt, und es entsteht eine enorme Anhäufung von Nebelmassen, so daß diese wohl den Raum von mehr als 100 Kubikmeilen einnehmen, und ihre dunkle Färbung zeigt an, daß die Wasserkügelchen, aus denen sie besteht, sehr eng aneinander gedrängt sind. So lange eine solche Wolke ihre scharfe obere Begrenzung und halbkugeligen Formen behält, fällt kein Regen aus ihr. Plötzlich erhält der Gipfel ein weicheres Aussehen, breitet sich seitlich in zirkusartigen Fäden aus, und gleichzeitig stürzt Regen aus der Wolke herab.“ (Hier fügt Hann in einer Anmerkung hinzu: „Setzen wir hinzu, zucken auch Blitze aus derselben und man hört den Donner.“) Ley fährt dann fort: „Die elektrische Spannung, welche die die Wolken bildenden Wasserkügelchen am Zusammenfließen hinderte, so lange diese ihre sphärische Gestalt behielten, wird im oberen Teile der Wolke plötzlich vermindert, sobald die Kügelchen zu Eisnadeln gefrieren,

aus deren Ecken und Spitzen die Elektrizität augenblicklich entweicht usw.“

Es ist also hiernach klar, daß sowohl Ley als auch Hann der Ansicht waren, daß in einer solchen Gewitterwolke das Wasser überall in flüssiger Form enthalten ist, d. h., daß die Temperatur in der Wolke von unten bis oben hin über dem Gefrierpunkt liegt, und daß Eisnadeln sozusagen erst nach Fertigstellung der Wolke und dann auch nur an ihrer oberen Grenzfläche entstehen.

Die Auffassung, daß die Temperatur einer solchen Wolke — abgesehen von jener dünnen oberen Grenzschicht — überall über dem Gefrierpunkt liegt, ist übrigens auch physikalisch leicht zu verstehen; denn der Wasserdampf, der in einer solchen Wolke zur Kondensation gelangt, hat doch bei seiner Verdunstung fast die ganze Sonneneinstrahlung eines großen Teils eines Sommertages an der betreffenden Stelle mit in die Höhe genommen und dann bei seiner Kondensation in der Wolke in verhältnismäßiger kurzer Zeit wieder an die umgebende Luft abgegeben, so daß also deren Temperatur dabei ganz beträchtlich erhöht werden mußte — und zwar um so mehr, je höher hinauf der Dampf sich in der Wolke niederschlug, da ja die zu erwärmende Luftmenge nach oben hin immer geringer wird. Die fragliche Temperaturerhöhung läßt sich übrigens auch in folgender Weise annähernd berechnen. Da nämlich nach Conrad¹⁾ in einer dichten Kumuluswolke etwa 5 g Wasser im Kubikmeter enthalten sind und die Verdampfungswärme des Wassers 537 Kalorien beträgt, so werden bei der Kondensation des Dampfes in der Gewitterwolke, da eine solche Wolke von unten bis oben hin ziemlich das gleiche Aussehen hat, überall in jedem Kubikmeter rund 2,7 kg-Kalorien frei. Da ferner 1 cbm Luft bei Normaldruck 1,3 kg wiegt, und der Druck in Höhen von beispielsweise 4 und 10 km nach Tetens²⁾ bzw. 461 und 198 mm Hg beträgt, so ergibt sich mit Berücksichtigung der spezifischen Wärme der Luft (0,238), daß die fragliche Temperaturerhöhung in den genannten beiden Höhen bzw. 14,5 und 33,5° C beträgt. Die Tatsache, daß in solchen Wolken selbst in Höhen von 10 km und darüber das Wasser noch in flüssiger Form enthalten sein kann, ist also hiernach durchaus verständlich.

Wenn daher Simpson und Scrase in einem späteren Teil ihrer Abhandlung sagen, daß die Trennung der elektrischen Ladungen, die sie in zahlreichen Aufstiegen auch in den oberen Teilen einer

1) V. Conrad, Denkschrift d. Wiener Akad. 23. S. 115. 1901.

2) O. Tetens, Jahrbuch d. Observ. Lindenberg 7. S. 235. 1911.

Gewitterwolke beobachtet haben, von der Wilsonschen Influenztheorie¹⁾ nicht erklärt werden könne, weil diese Theorie in der Wolke verhältnismäßig schnell fallende *Tropfen* verlangt, das Wasser aber nach ihrer Meinung in jenen Teilen der Wolke nur in der Form von Eisnadeln oder Platten aus Eis existieren könne, die nur langsam fallen und deren Gestalt und wechselnde Lage auch für die Bildung induzierter Ladungen nicht günstig sei, so besteht m. E. nach dem Obigen eine solche Schwierigkeit für jene Theorie nicht.

1) C. T. R. Wilson, Journ. Franklin Inst. 208. S. 1—12. 1929.

Hamburg, Physikalisches Staatsinstitut, im September 1937.

(Eingegangen 29. September 1937)

Zur Fluoreszenz der Seltenen Erden

Von H. Gobrecht

(Mit 3 Abbildungen)

1. Über die Fluoreszenz des Cers

Diese Arbeit schließt sich an eine Reihe früherer Untersuchungen¹⁾ an, in welchen die Fluoreszenz reiner Salze und Lösungen der Seltenen Erden gefunden und bearbeitet wurde. Folgende Elemente waren bis jetzt als fluoreszenzfähig bekannt: Sm, Eu, Tb und Dy im Sichtbaren und Ultrarot, Gd im Ultraviolett. Die Fluoreszenzspektren dieser genannten Elemente bestehen bei den Salzen aus Linien, die besonders bei tiefen Temperaturen sehr scharf sind, und bei den Lösungen aus schmalen Banden. In der vorliegenden Arbeit wird das 3wertige Cerion auf seine Fluoreszenzfähigkeit geprüft.

Bekanntlich werden die linienhaften Spektren der Ionen der Seltenen Erden in festen und flüssigen Körpern auf Änderungen der Atomenergie innerhalb der $4f$ -Schale zurückgeführt. Da Cer und Ytterbium in dieser Schale nur ein Elektron bzw. eine Lücke und damit nur einen Term haben, ist bei diesen Elementen eine solche Art der Energieänderung unmöglich — wenn man von Übergängen zwischen den Multiplettkomponenten des Grundterms absieht — weswegen bei diesen Elementen auch keine scharfen Spektren beobachtet werden. Dagegen sind Übergänge zu äußeren, unbesetzten Elektronenbahnen möglich und werden auch als Absorptionen beobachtet, allerdings, wie zu erwarten, wegen der Störung in äußeren Bahnen als verwaschene, breite Banden. Sie liegen bei den genannten Elementen im Ultraviolett und sind als Übergänge in die $5d$ - und vielleicht $6s$ -Bahn zu deuten. Man kann aus den Intensitäten schließen, daß es sich bei den längerwelligen Absorptionen im Ultraviolett um Übergänge nach $5d$ handelt, da diese beim Cer sehr stark, entsprechend den sehr wahrscheinlichen Übergängen $^2F_{5/2} \rightarrow ^2D_{3/2, 5/2}$ ($\Delta L = -1$, $\Delta J = -1, 0$) und beim Ytterbium sehr

1) R. Tomaschek u. O. Deutschbein, Phys. Ztschr. **34**. S. 374. 1934; Ann. d. Phys. [5] **29**. S. 311. 1937; H. Gobrecht, Ann. d. Phys. [5] **28**. S. 673. 1937; R. Tomaschek u. E. Mehnert, Ann. d. Phys. [5] **29**. S. 306. 1937.

V
3
1

1
9
3
8
XUM

schwach auftreten, entsprechend dem im feldfreien Zustand nicht vorkommenden Übergang $^2F \rightarrow ^4K (\Delta L = 4)^1$.

Falls nun eine Fluoreszenz von Cer erwartet wird, so ist ihre spektrale Lage nur im Ultraviolett oder im Ultrarot zu erwarten. Im letzten Falle würde sie entstehen durch Übergang zwischen den Termen, deren Lage durch die ultraviolettten Absorptionen bekannt ist und würde infolge der Differenz $40000 - 34000 = 6000 \text{ cm}^{-1}$ bei etwa $1,7 \mu$ liegen. Eine Fluoreszenz im Ultraviolett kann entweder nur dort liegen, wo sich die Absorptionsbanden befinden, würde also denselben Übergängen wie die Absorptionen, nur in umgekehrter Richtung entsprechen, oder sie kann jeweils etwa $3-4000 \text{ cm}^{-1}$ längerwellig liegen, wenn der Übergang nicht zur tiefen Stufe des Grundterms nach $^2F_{7/2}$, sondern zur oberen, also nach $^2F_{5/2}$ erfolgt. Denn die Aufspaltung des Grundterms dürfte etwa 3500 cm^{-1} (für $\sigma = 32$) betragen. Beim Ytterbium liegen die Verhältnisse ähnlich. Da jedoch die Aufspaltung des Grundterms wesentlich größer ist (10000 cm^{-1}), würde die längstwellige Fluoreszenz in das nahe Ultraviolett fallen, jedoch wegen der Auswahlregeln sehr schwach sein. Sicher folgt aus diesen Überlegungen, daß eine Fluoreszenz durch Elektronenübergang beim 3 wertigen Cer und Ytterbium *nicht* im sichtbaren Spektralgebiet zu erwarten ist.

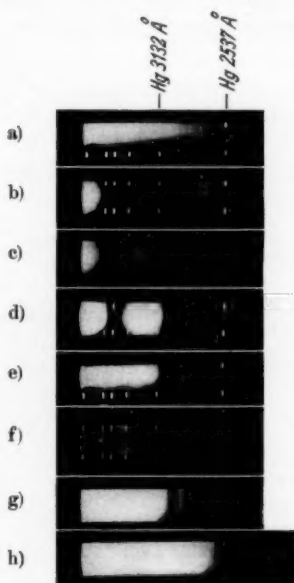
Es wurde nun nach der Fluoreszenz des Cers gesucht und zunächst festgestellt, daß eine Fluoreszenz reiner Cersalze und ihrer Lösungen im Sichtbaren *nicht* nachzuweisen ist. Hingegen wurde tatsächlich eine starke Emission in dem vermuteten Spektralgebiet im Ultraviolett gefunden. Als erregende Lichtquelle wurde ein Unterwasserfunke mit Wolframelektroden in Verbindung mit einem Chlor-Brom-Filter benutzt. Das Spektrum der Lichtquelle allein und die Absorption des Filters, welche sich von $4250-2880 \text{ \AA}$ erstreckt, sind in Abb. 1a und 1b wiedergegeben. Als Präparate wurden Cersulfat und dessen wäßrige Lösung benutzt; sie waren frei von anderen Seltenen Erden. Die Spektren der Fluoreszenz und Absorption des festen Sulfats sowie der wäßrigen Lösung sind ebenfalls in Abb. 1 wiedergegeben. Die Emission der Lösung ist wegen der geringen Löslichkeit des Cersulfats sehr schwach. In der Tabelle sind die Wellenlängen der Maxima, in Abb. 2 die Spektren selbst schematisch gezeichnet. Die Fluoreszenzbande des festen Salzes hört nach der kurzwelligen Seite dort auf, wie Abb. 1c zeigt, wo die starke Absorption beginnt. Es ist also nicht fest-

1) Die schwache Bande beim Ytterbium wurde erst kürzlich gefunden: S. Freed u. R. I. Mesirov, Journ. of Chem. Phys. 5. S. 22. 1937.

zustellen, wie weit sie nach der kurzwelligen Seite zu reichen würde. Da in der Lösung die Emission wesentlich langwelliger ist, während die Absorption nach Aufnahmen von konzentrierter Lösung ebenfalls

Abb. 1. Spektren
zur Fluoreszenz des Cers.

- a) Unterwasserfunke
- b) Funke mit Cl-Br-Filter
- c) Fluoreszenz von reinem Cerosulfat (fest), 10 Min. belichtet
- d) Fluoreszenz von reinem Cerosulfat (fest), 2 Std. belichtet
- e) Absorption von reinem Cerosulfat (fest) (Reflexion)
- f) Fluoreszenz von Cerosulfatlösung
- g) Absorption von Cerosulfatlösung
- h) Absorption von Cerosulfatlösung



nur bis zur Hg-Linie 3132 reicht, dürfte dort die Emissionsbande ungestörter von Absorption sein. Ihre Breite dürfte darauf schließen lassen, daß auch die Emissionsbande im festen Salz nicht mehr viel weiter nach kurzen Wellen geht.

Tabelle

Absorption	Emission
Cersulfatlösung	Cersulfatlösung
2960 Å 33774 cm ⁻¹	3650 Å 27389 cm ⁻¹
2537 Å 39400 cm ⁻¹	Cersulfat (fest)
2409 Å 41500 cm ⁻¹	3444 Å 29030 cm ⁻¹
	3220 Å 31050 cm ⁻¹

Die Fluoreszenz entsteht bei Erregung durch das benutzte Filter hindurch, wie Abb. 1 zeigt, durch das Licht, welches durch die beiden kurzwelligen Absorptionsbanden absorbiert wird. Trotzdem ist die Emission, ähnlich wie bei den anderen Seltenen Erden

gefunden wurde, als Übergang von der Energiestufe, deren Lage durch die längstwellige Absorptionsbande bekannt ist, zur oberen Stufe des Grundterms ${}^2F_{7/2}$ zu deuten. Somit würde die Frequenzdifferenz zwischen der Emissionsbande und der längstwelligen Absorptionsbande direkt die Dublettaufspaltung des Grundterms

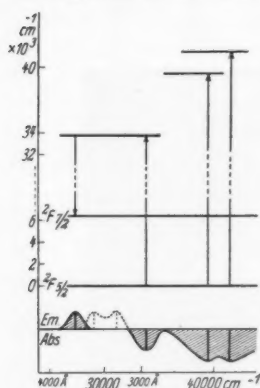


Abb. 2. Absorption und Fluoreszenz von $\text{Ce}_2(\text{SO}_4)_3$ -Lösung. Die gestrichelten Emissionsbanden sind Fluoreszenz von festem $\text{Ce}_2(\text{SO}_4)_3$

ergeben. Es weisen jedoch die große Aufspaltung der Emission des festen Salzes in zwei Banden von der Differenz 2000 cm^{-1} sowie die große Verschiebung der Emission von 3000 cm^{-1} beim Übergang vom festen Sulfat zur Sulfatlösung auf einen sehr großen Einfluß der elektrischen Felder der Umgebung hin. Bei den anderen Seltenen Erdelementen beträgt die Aufspaltung durch inneren Starkeffekt in den meisten Verbindungen selten mehr als 500 cm^{-1} und die Verschiebung durch die höheren Glieder des Starkeffektes ist selten größer als 1000 cm^{-1} . So ist infolge der großen Verschiebung der Banden durch den inneren Starkeffekt beim Cer die direkte Messung der Aufspaltung des Grundtermdoublets nicht mit Sicherheit mög-

lich. Als Grenzen der Aufspaltung würden sich $4\text{--}6500 \text{ cm}^{-1}$ ergeben, während für $\sigma = 32$ sich 3500 cm^{-1} berechnen würde.

2. Über die Fluoreszenz der Seltenen Erden in Boraxperlen

Es wurde bereits oben angeführt, daß eine Fluoreszenz des 3wertigen Cerions in seinen Verbindungen nicht im sichtbaren Spektralgebiet zu erwarten ist, und der experimentelle Nachweis erbracht, daß keine sichtbare, wohl aber ultraviolette Fluoreszenz vorhanden ist. Vor wenigen Jahren erschien eine Veröffentlichung¹⁾, in welcher die „außerordentliche Fluoreszenz des Cers und anderer Seltener Erden in den Borax- und Phosphorsalzperlen“ beobachtet wird und von analytischem Interesse sein soll. Da nach den Ergebnissen des 1. Teiles der vorliegenden Untersuchung das Cer in der genannten Arbeit wohl zweifellos mit anderen Seltenen Erdelementen verunreinigt gewesen sein muß, erschien eine Untersuchung an reinsten Präparaten notwendig.

1) M. Haitinger, Wiener Anz. Nr. 18. S. 188. 1933.

Von den 12 Seltenen Erdelementen Cer bis Ytterbium wurden Borax- und Phosphorsalzperlen hergestellt und diese auf ihre Fluoreszenzfähigkeit im sichtbaren Spektralgebiet geprüft.

Zur Erregung diente das gefilterte Ultraviolett einer Kohlebogenlampe. Da die Phosphorsalzperlen dieselben Resultate ergaben und sich bekanntlich viel schlechter herstellen lassen als Boraxperlen, kann für analytische Zwecke die Herstellung von Boraxperlen empfohlen werden. Im folgenden soll daher nur von diesen gesprochen werden.

Starke linienhafte Fluoreszenz gaben die Perlen mit den Seltenen Erden, die auch als reine Salze im Sichtbaren fluoreszieren, also

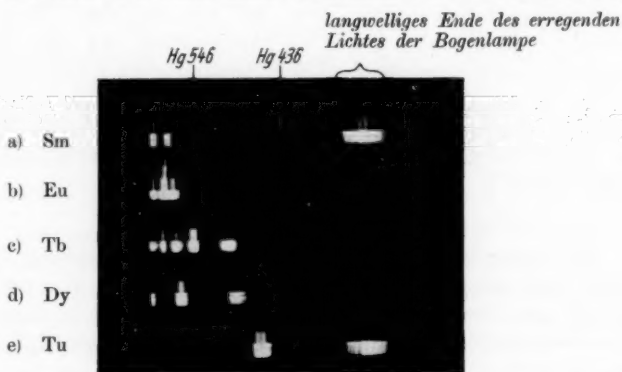


Abb. 3. Fluoreszenzspektren der mit Seltenen Erden präparierten Boraxperlen. Belichtungszeiten: a) und e) 10 Min.; b), c) und d) 3 Min. Agfa-Spektralrot. Vergleichsspektrum: Hg-Bogen. Die Wellenlängen von a) bis d) finden sich in früheren Arbeiten^{1) 2)} unter den Wellenlängen reiner Salze, mit denen sie gut übereinstimmen. Über die Wellenlängen von Tu vgl. eine demnächst erscheinende Arbeit des Verf. über Tu

Sm, Eu, Tb und Dy. Eine Ausnahme bildet Thulium, welches als reines Salz nicht fluoresziert, dagegen jedoch in der Borax- (und Phosphorsalz-)perle. Eine Aufnahme der Spektren zeigt Abb. 3. Die Empfindlichkeit ist sehr groß, was analytisch deswegen wichtig ist, da diese Elemente (besonders Eu und Tb) im sichtbaren Spektralgebiet nur schwache Absorptionen haben²⁾.

Die Boraxperlen mit den übrigen Seltenen Erdelementen zeigen keine Spur von linienhafter Fluoreszenz. Dagegen geben einige ein

1) H. Gobrecht, Ann. d. Phys. [5] 28. S. 673. 1937.

2) Vgl. auch H. Gobrecht u. R. Tomaschek, Ann. d. Phys. [5] 29. S. 324. 1937.

schwaches, kontinuierliches Leuchten, welches von Grün bis Rot reicht. Es sind die Elemente Ce, (Pr), (Sm), Eu, (Yb). Dieses sind aber diejenigen Elemente, welche in zwei Wertigkeitsstufen vorkommen. Daß die Erscheinung damit im Zusammenhang steht, sieht man an folgendem Versuch: Wenn man eine mit Eu aktivierte Boraxperle im oxydierenden Teil der Flamme hergestellt hat, fluoresziert sie intensiv rot, im Spektrum sind nur scharfe Linien zu erkennen. Schmilzt man die gleiche Perle einige Minuten im reduzierenden Teil der Flamme, so gibt sie nachher bei Bestrahlung mit ultravioletttem Licht nur noch schwach die linienhafte Fluoreszenz, dagegen tritt eine neue, schwache Fluoreszenz auf, die im Spektroskop kontinuierlich grün bis rot aussieht. Durch Umschmelzen der gleichen Perle im oxydierenden Teil wird der erste Zustand wieder hergestellt. Diese kontinuierliche Fluoreszenz ist bei den genannten Elementen nur in der Stärke, nicht aber in der spektralen Lage verschieden, ist also deswegen wie auch wegen der an und für sich geringen Intensität für analytische Zwecke völlig unbrauchbar.

Zusammenfassung

Im ersten Teil wird über eine neue, im Ultraviolett liegende Fluoreszenz reiner Cersalze und -lösungen berichtet. Der zweite Teil handelt von der Fluoreszenz der Seltenen Erden in Borax- und Phosphorsalzperlen. In diesen geben nur *die* Seltenen Erdelemente linienhafte Fluoreszenz, deren reine Salze ebenfalls diese Fluoreszenz zeigen; eine Ausnahme macht Thulium, welches in der Borax- und Phosphorsalzperle fluoresziert, im reinen Salz dagegen nicht.

Ich möchte der Auergesellschaft (Degea) meinen herzlichsten Dank für die freundliche Überlassung einiger reiner Präparate aussprechen.

Dresden, Physikalisches Institut der Technischen Hochschule,
am 12. Oktober 1937.

(Eingegangen 13. Oktober 1937)

**Vergleichende Anmerkungen zu den Arbeiten
von Richter und Wittke
über magnetische Nachwirkung**

Von Heinz Wittke

(Mit 6 Abbildungen)

G. Richter hat in dieser Zeitschrift¹⁾ zahlreiche und schöne Messungen der magnetischen Nachwirkung an Carbonyleisen im Temperaturintervall von $-12,6$ bis zu $+97,3^{\circ}\text{C}$ veröffentlicht.

Er stellt den nachwirkenden Teil der Induktion B_n dar durch die Formel

$$(1) \quad B_n = \beta \cdot \frac{1}{\ln \frac{\tau_{\max}}{\tau_{\min}}} \cdot E i \left(-\frac{1}{\tau_{\min}} \right) - E i \left(-\frac{1}{\tau_{\max}} \right),$$

worin β die Amplitude der Nachwirkung ist, die man durch Extrapolation auf $t = 0$ gewinnt, τ_{\max} und τ_{\min} Konstanten bedeuten.

Formel (1) leitet er in einer allerdings etwas summarischen Weise aus den Vorstellungen Beckers²⁾ ab, welche dieser für die mechanisch-elastische Nachwirkung entwickelt hat.

Aus seinen Messungen findet Richter noch die bemerkenswerte Tatsache, daß sich τ_{\max} und τ_{\min} darstellen lassen durch die für beide gültige Beziehung:

$$(2) \quad \tau = C \cdot e^{\frac{\theta}{T}},$$

wobei $\frac{\tau_{\max}}{\tau_{\min}} = \text{const}$ ist.

Er schließt daraus, daß im Ferromagnetikum neben momentan den äußeren Feldänderungen folgenden Bezirken auch träge vorhanden sind, deren individuelle Relaxationszeiten sich statistisch verteilen nach dem Gesetz:

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \varphi(\tau) = \frac{1}{\tau \cdot \ln \frac{\tau_{\max}}{\tau_{\min}}} \quad \text{für} \quad \tau_{\min} \leq \tau \leq \tau_{\max}, \\ \varphi(\tau) = 0 \quad \text{für alle anderen } \tau. \end{array} \right.$$

1) G. Richter, Ann. d. Phys. [5] **29**, S. 605. 1937 (R genannt).

2) R. Becker, Ztschr. f. Phys. **33**, S. 185. 1925.

Verf. hat nun in einer hier veröffentlichten vorläufigen Mitteilung¹⁾ und kürzlich ausführlich²⁾ mitgeteilt, daß er den gleichen Nachwirkungseffekt an gewöhnlichem Eisendraht, wie er im Handel als Bindedraht bekannt ist, in einem Temperaturintervall von $-19,5$ bis zu $+94,8^\circ \text{C}$ gemessen hat und seine Messungen darstellen konnte durch die Formel

$$(4) \quad \frac{\eta}{b} = C_1 \cdot e^{-at} + \bar{C}_3 \cdot \frac{1}{(a+t)^2}, \quad \bar{C}_3 = \frac{N \cdot h}{b} \text{ } ^3),$$

worin der zweite Term wesentlich identisch ist mit B_n bei Richter. Formel (4) beruht auf dem Ansatz³⁾:

$$(5_A) \quad \mathfrak{B}_\gamma = \mu \dot{H} + \gamma(\mu_0 H - \mathfrak{B}_\gamma)$$

mit

$$(5_B) \quad \mathfrak{B} = \int_0^\infty \mathfrak{B}_\gamma \cdot f(\gamma) d\gamma$$

und

$$(5_C) \quad f(\gamma) = a^2 \gamma \cdot e^{-a\gamma}.$$

Es liegt die Fragestellung nahe: „Sind beide Autoren zu wesentlich verschiedenen Resultaten gekommen?“ Zur Beantwortung hat der Verf. versucht, ob die Richterschen Messungen sich nicht auch nach seinen Formeln darstellen lassen.

Es müßte dann wegen (4), da b/η dem Ausdruck $B_n/\Delta B$ bei Richter entspricht, der

$$(6) \quad \text{Rest}^{-\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{\frac{\Delta B}{B_n}} = \sqrt[2]{\frac{a}{\bar{C}_3}} + \frac{1}{\sqrt[2]{\bar{C}_3}} \cdot t$$

eine lineare Funktion der Zeit t sein.

Die Richterschen Abb. 6 und teilweise 5 wurden zur Prüfung⁴⁾ benutzt und gaben die hier folgenden Abb. 1, 2 und 3. Man sieht, daß auch seine Messungen sich gut nach Wittkes Formeln darstellen lassen. Richter scheint diese Möglichkeit entgangen zu sein.

Bemerkenswert ist dabei, daß bei Wittke die durchgemessenen Zeiten nur 1,8 Sek. betrug, bei Richter dagegen von 10^{-2} bis zu 10^{+3} Sek. In diesem riesigen Intervall gilt also die Formel (6) ausnahmslos, und zwar bei zwei gänzlich verschiedenen Eisensorten.

1) H. Wittke, Ann. d. Phys. [5] 27. S. 622. 1936.

2) H. Wittke, Ann. d. Phys. [5] 31. S. 97. 1938 (W genannt).

3) Die Bedeutung der Buchstaben in (4) bis (5_C) erhellt aus Abb. 3 in W.

4) Zu Stichproben herausgesuchte andere Meßreihen von G. Richter gaben ebenso gute Resultate.

Für größere Zeiten ist in Gl. (4) nur der zweite Term noch merklich; man kann sie dann schreiben:

$$(4_A) \quad \eta \text{ für große } t = B_n = \frac{\frac{N}{a^2}}{\left(1 + \frac{t}{a}\right)^2} \cdot h.$$

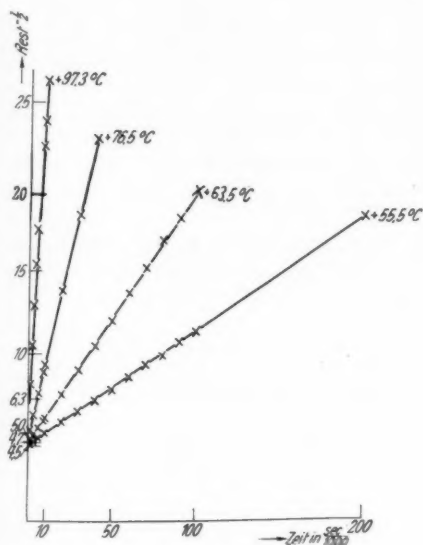


Abb. 1

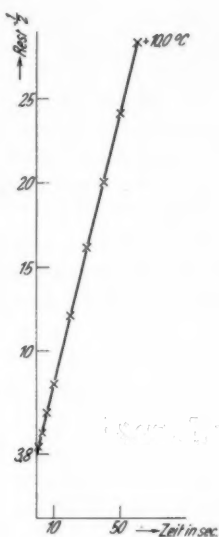


Abb. 2

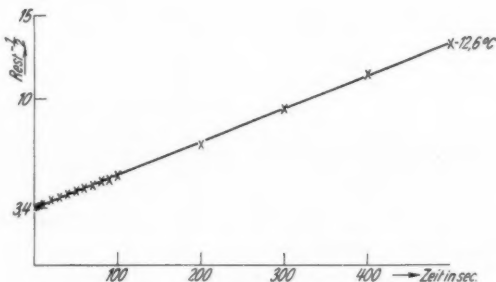


Abb. 3

Aus den Abschnitten auf der Ordinatenachse und den Neigungen der Geraden in den Abb. 1, 2 und 3 ergeben sich unter Berücksichtigung von $C_3 = \frac{N \cdot h}{b}$ die Größen a und N/a^2 in Tab. 1.

Tabelle 1

Temperatur T in °K	a in Sek.	N/a^2	$1/T$	$\ln a$
370,5	$3,15 \cdot 10^{-8}$	25	$2,70 \cdot 10^{-3}$	- 5,7536
349,7	$11,3 \cdot 10^{-8}$	40	$2,86 \cdot 10^{-3}$	- 4,4848
336,7	$31,3 \cdot 10^{-8}$	45	$2,97 \cdot 10^{-3}$	- 3,4637
328,7	$63,8 \cdot 10^{-8}$	49	$3,04 \cdot 10^{-3}$	- 2,7521
283,2	$9270 \cdot 10^{-8}$	69	$3,53 \cdot 10^{-3}$	+ 2,2270
260,6	$170000 \cdot 10^{-8}$	87	$3,84 \cdot 10^{-3}$	+ 5,1366

Die Zahlen für N/a^2 sind dabei nur rohe Näherungen; denn bei Richter finden sich keine Angaben über die Feldstärken, welche zu den konstant gehaltenen ΔB bei den verschiedenen Temperaturen gehört haben. So konnte für $\Delta B/h$ nur der runde Wert 1000 eingesetzt werden.

Des weiteren wurde der Temperaturabhängigkeit der Hauptrelaxationszeit a nachgegangen. Sie läßt sich, Richters Anregung für die τ folgend, darstellen als

$$(7) \quad a = a_{\infty} \cdot e^{\frac{\Theta}{T}}.$$

Abb. 4 zeigt zum Beweise mit den $\ln a$ der Tab. 1

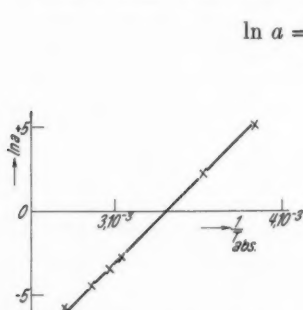


Abb. 4. Die Hauptrelaxationszeit a als Funktion der Temperatur

$$\ln a = \ln a_{\infty} + \frac{\Theta}{T}$$

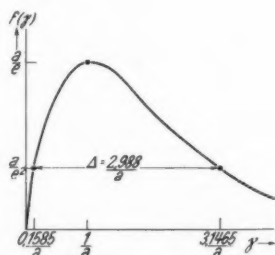


Abb. 5. Die Gestalt der Verteilungsfunktion $f(\gamma) = a^2 \gamma \cdot e^{-a\gamma}$

aufgetragen über $1/T$ wirklich als gerade Linie. Aus ihr ergeben sich die Zahlenwerte annähernd zu

$$a_{\infty} = 4,2 \cdot 10^{-15} \text{ Sek.}, \quad \Theta = 10^4 \text{ °K.}$$

Zur Veranschaulichung des Temperatureinflusses auf die Verteilungsfunktion $f(\gamma)$ ist diese in willkürlichem Maßstabe in Abb. 5 dargestellt. Bei $\gamma = \frac{1}{a}$ liegt ihr Maximum a/e . Als Verteilungsbreite Δ soll der Abstand derjenigen Punkte verstanden werden, in

welchen $f(\gamma) = \frac{f(\gamma)_{\max}}{e} = \frac{a}{e^2}$ ist. Diese Punkte liegen, wie eine einfache Rechnung zeigt, bei $\gamma = \frac{0,1585}{a}$ und bei $\gamma = \frac{3,1465}{a}$. Die Verteilungsbreite ist also:

$$(8) \quad \Delta = \frac{2,988}{a}.$$

Ein Blick auf die Beschriftung der Abb. 5 lehrt, daß steigende Temperatur — d. h. fallendes a nach (7) — eine Verbreiterung und Verflachung der Verteilungsfunktion bewirkt. Die Verteilungsschärfe S , nämlich $f(\gamma)_{\max} : \Delta$, also mit (7) und (8):

$$(9) \quad S = \frac{a_0^2}{2,988 e} \cdot e^{\frac{2\theta}{T}}$$

ist ein ganz gutes Maß für diese Verhältnisse. Mit den vorhin angegebenen Zahlen entsteht z. B. die Tab. 2, welche über die Größenordnungen Auskunft gibt.

Tabelle 2

T °K	a Sek.	S
10	10^{420}	10^{830}
100	10^{39}	10^{57}
290	4	2
600	10^{-7}	10^{-15}

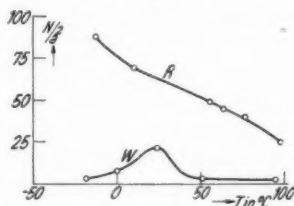


Abb. 6. Die Nachwirkungsamplitude N/a^2 als Funktion der Temperatur bei verschiedenen Eisensorten

Bei sehr tiefen Temperaturen ist also zu erwarten, daß wegen der dabei entstehenden ungeheuren Größe der Hauptrelaxationszeit a bei endlichem N/a^2 Gl. (4) praktisch übergeht in

$$(10) \quad \frac{\eta}{b} = C_1 \cdot e^{-a^2} + \frac{C_2}{a^2},$$

d. h., daß der Rest „eingefroren“ bleibt.

R Abb. 11 und W Abb. 9 zeigen in wesentlich gleicher Weise die Amplitude der Nachwirkung in Abhängigkeit von der aussteuernden Feldstärke h . Die Befunde beider Autoren sind die gleichen.

Von Interesse ist noch der Temperaturverlauf von N/a^2 bei Richter nach den Zahlenwerten dieser Tab. 1 und bei Wittke aus W Abb. 11, welchen Abb. 6 zeigt. Von der durch Wittke beobachteten Anomalie in der Gegend von $+24^\circ \text{C}$ hat Richter nicht das mindeste gefunden. Ob ein grundsätzlicher Unterschied in den Verläufen der beiden Kurven besteht, kann noch nicht entschieden werden.

Es liegt die Vermutung nahe, daß Wittkes so auffallendes Resultat sich aus der Qualität des von ihm benutzten legierten Eisens erklärt und auf eine Art von magnetischem Umwandlungspunkt sekundärer Art hinweist.

Die von Richter angegebenen Verhältnisse bei plastischen Deformationen kann Verf. aus seinem Messungsmaterial nur bestätigen. Er hat dieses nicht veröffentlicht, weil wegen der starken Verkleinerung der Nachwirkungsamplitude diese Vorgänge sich der zu einer Publikation genügenden Meßgenauigkeit bei seiner Anordnung entzogen.

Zusammenfassung

1. Die Richterschen Messungen lassen sich gut nach den Wittkeschen Formeln darstellen.

2. Die mit steigender Temperatur zunehmende Diffusion der Verteilungsschärfe scheint eine physikalisch größere Realität für sich zu haben als die Verschiebung der Becker-Richterschen Verteilungsfunktion als undeformiertes Ganzes.

3. Die unter der approximierenden Annahme einer zeitlich sprunghaften Änderung der Feldstärke abgeleitete Richtersche Formel für B_n gestattet nicht die Konstruktion der $\mathfrak{B} - H$ -Schleifen, wie sie die Wittkesche Behandlungsweise erlaubt¹⁾. Erst hierdurch aber wird der Effekt in der $\mathfrak{B} - H$ -Ebene darstellbar und dabei als eine von der Hysteresis grundsätzlich verschiedene Erscheinung erkennbar.

4. Aus der Temperaturabhängigkeit ist zu erwarten, daß bei sehr tiefen Temperaturen der Rest „einfriert“.

5. Hieraus und aus der besonderen Größe der Nachwirkung bei dem sehr reinen Richterschen Eisen kann wohl als gesichert angenommen werden, daß die Nachwirkung eine wesentlich *magnetische* Erscheinung ist und nicht ein auf Verunreinigungen im Ferromagnetikum beruhender Störeffekt.

6. Fortschritte unserer Kenntnisse um diese Dinge wären von Messungen bei sehr tiefen Temperaturen an Eiseneinkristallen zu erwarten.

1) Vgl. dazu H. Wittke, Schriften d. Königsberger Gelehrten Gesellschaft, 12. Jahr, Heft 3, Naturw. Klasse. 1935.

Königsberg Pr., den 21. Oktober 1937.

(Eingegangen 23. Oktober 1937)